
المسند في الرياضيات
الأستاذ
حيدر وليد
07701780364
الأستاذ حيدر وليد
دار المغرب للطباعة والنشر
π
2021
القطوع المخروطية 2
الأعداد المركبة 1
الهندسة الفضائية 6
السادس الاحيائي
الجزء الأول
ملازم دار المغرب
07702729223

الأستاذ

حيدر وليد

07701780364



2021

الرياضيات



ثلاث فصول



عند اقتناء ملزمتك من دار المغرب تأكد من وجود
(الجلدة المدورة اللاصقة)
في وجه الغلاف غير ذلك تعتبر مزورة





المُسْنِد في الرِّيَاضِيَّاتِ

الجزء الأول

السادس الاحيائي

1 الأعداد المركبة

2 القطوع المخروطية

6 الهندسة الفضائية



صفحة ملازم
دار المغرب

الحقوق محفوظة

أسم الملزمة : المسند في الرياضيات

إعداد: الاستاذ حيدر وليد

الطبعة : الأولى

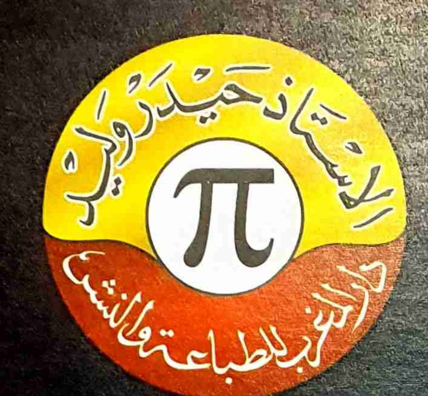
المطبعة : مطبعة دار المغرب











الأستاذ
حيدر وليد
07701780364

المُسنِد في الرِّياضِيّاتِ

الإعداد المركبة



2021

07702729223
ملازم دار المغرب
ملازم دار المغرب

مدخل الى موضوع الاعداد المركبة

نعلم ان الجذور التربيعية للاعداد الموجبة هي :

$$\sqrt{1}=1 \quad , \quad \sqrt{9}=3 \quad , \quad \sqrt{25}=5 \quad , \quad \sqrt{100}=10$$

اي هناك قيمة لعدد موجب تحت الجذر التربيعي .

ولكن :

$\sqrt{-16}=?$ → 4 (خطأ) ، −4 (خطأ)

$\sqrt{-9}=?$ → 3 (خطأ) ، −3 (خطأ)

إذن لا توجد قيمة حقيقية لعدد سالب تحت الجذر التربيعي .

أو جذر دليله زوجي مثل: $\sqrt[6]{\ }$, $\sqrt[4]{\ }$, $\sqrt[8]{\ }$ ...الخ .

لذلك:

نفرض ان هناك قيمة لعدد سالب تحت الجذر التربيعي هو (i)

$$\sqrt{-1}=i \quad \Rightarrow \quad i^2=-1$$

وبتربيع المعادلة الاخيرة

$$i^4=1$$

خلاصة: حفظ

$$\boxed{i^2=-1}$$

$$\boxed{i^4=1}$$

$$i^3=(i^2)(i)$$

$$i^3=(-1)\,(i)$$

$$\boxed{i^3=-i}$$

إستراحة شعرية :

ما مرّ ذكركَ إلّا وابتسمتُ له
كأنك العيــد والباقــون أيامُ
أو هام طيفك إلا طرتُ اتبعهُ
أنتَ الحقيقة والجُلّاسُ اوهامُ

كيف نكتب عدد سالب تحت الجذر التربيعي بدلالة (i):

$\sqrt{-36} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{-1} = 6i$	$\sqrt{-25} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{-1} = 5i$	$\sqrt{-16} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{-1} = 4i$
$\sqrt{-20} = \sqrt{20} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{5\times4}\ (i) = 2\sqrt{5}i$	$\sqrt{-18} = \sqrt{18} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{9\times2}\ (i) = 3\sqrt{2}i$	$\sqrt{-12} = \sqrt{12} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{4\times3}\ (i) = 2\sqrt{3}i$

تعريف:

العدد المركب: هو العدد الذي يكتب بصيغة (a+bi) حيث يسمى :

- a جزؤه الحقيقي
- b جزؤه التخيلي $\quad a, b \in R$

يُرمز لمجوعة الاعداد المركبة بالرمز $\mathbb{C}$

* تسمى الصيغة a+bi الصيغة العادية للعدد المركب .
أو الصيغة الجبرية للعدد المركب .

* يمكن كتابة العدد المركب بشكل زوج مرتب (a ، b) وتسمى الصيغة الديكارتية للعدد المركب .

الجزء التخيلي	الجزء الحقيقي	الصيغة الديكارتية	العدد المركب الصيغة الجبرية
3	2	(2 , 3)	2 + 3i
−3	−2	(−2 , −3)	−2 − 3i
−1	$\sqrt{3}$	($\sqrt{3}$, −1)	$\sqrt{3} - i$
2	0	(0 , 2)	2i
0	3	(3 , 0)	3

→ 2i = 0 + 2i

→ 3 = 3 + 0i

قوى (i)

عند تبسيط i^n نقسم الأس على 4 وكما في الصيغة التالية :

$$i^n = \{i \ , -i \ , 1 \ , -1\}$$

الباقي =1 ، الباقي =3 ، الباقي =0 ، الباقي =2

$$i^n = (i^4)^{\text{ناتج القسمة}} \cdot (i)^{\text{باقي القسمة}}$$

مثال بسط ما يلي :

1 $i^{25} = (i^4)^6 \cdot (i)^1$

ناتج القسمة على (4) ، باقي القسمة

$= (1)^6 \cdot i = i$

2 $i^{58} = (i^4)^{14} \cdot i^2$

$= (1)^{14} \cdot i^2 = 1 * -1 = -1$

3 $i^5 = (i^4)^1 \cdot i$

$= 1\ (i) = i$

4 $i^6 = (i^4)^1 \cdot i^2$

$= (1)\ (-1) = -1$

5 $i^{999} = (i^4)^{249} \cdot i^3$

$= (1)^{249}\ (-i) = -i$

6 $i^{4n+1} = (i^4)^n \cdot i$

$= (1)^n \cdot i = i$

ناتج i^n هو:

$\{i \ , -i \ , 1 \ , -1\}$

سؤال إضافي جد ناتج:

$i^{6n+1} = (i^6)^n \cdot i$

$= (-1)^n\ i$

عندما $n =$ عدد زوجي

$(-1)^n = 1 \Rightarrow i^{6n+1} = i$

عندما $n =$ عدد فردي

$(-1)^n = -1 \Rightarrow i^{6n+1} = -i$

ملاحظة إذا كان الاس سالب ينزل للمقام ونغيّر الاشارة ثم نبسّط كما سبق وبعدها نضرب الكسر بـ (i^4) حيث $i^4 = 1$ أي لا نأثر على الكسر (يُعتبر الضرب في واحد).

7 i^{-17}

$$= \frac{1}{i^{17}} = \frac{1}{(i^4)^4 . i} = \frac{1}{i}(i^4)$$

$$= i^3 = -i$$

8 i^{-13}

$$= \frac{1}{(i^4)^3\ i} = \frac{1}{i}(i^4)$$

$$= i^3 = -i$$

اتفاق كل سؤال في أي موضوع في هذا الفصل عندما نرى i مرفوعة إلى الاس نقوم بتبسيط (i) قبل التفكير بأي شيء مهما كان السؤال (ونبسّط كما في الطريقة السابقة).

إني أحبك.. قلتها..
فبَنت بقلبي منزلكْ
هذا قلبي
اصطفاكَ على البرايا..
واصْطفاكَ..
وفَضّلَكْ
وأقامَ روحَكَ ..
قِبْلةً لوَجيبِه ..
واسْتقبَلَكْ !!
وتَلاكَ ترنيماً سماويّ اللحُونِ ..
ورَتّلَكْ !!
يا آخرَ الحبّ الجميلِ ..
ولسْتُ أدْرِكُ أوّلَكْ !!

العمليات على مجموعة الأعداد المركبة

في مجموعة الأعداد المركبة يوجد عمليات رياضية كالتي مرت عليك (الجمع - الطرح - الضرب - القسمة - الجذور التربيعية والتكعيبية - النظير الجمعي والضربي ... الخ) وسنتطرق إليها بالتفصيل.

أولاً: عملية الجمع: عند جمع عددين مركبين نجمع الجزء الحقيقي مع الجزء الحقيقي والجزء التخيلي مع الجزء التخيلي وبحسب الاشارة.



مثال جد مجموع العددين المركبين في كل مما يأتي:

1 $(3+4i)+(2+5i)$

توضيح قبل الحل: نقوم بجمع الجزء الحقيقي (3) مع (2) ونجمع (4i) مع (5i) حسب الاشارات.

جمع

$(3+4i) + (2+5i) = (3+2)+(4i+5i)$

جمع

$= 5+9i$

2 $(5+7i)+(-3-9i)$

توضيح قبل الحل: نقوم بجمع (5) مع (3-) وتكون طرح لأن الاشارات مختلفة ثم نجمع (7i) مع (9i-) وكذلك طرح لأن الاشارات مختلفة.

جمع

$(5+7i) + (-3-9i) = (5-3)+(7i-9i)$

$= 2-2i$

3 $(-7+2i) + (2-5i)$

$= (-7+2)+(2i-5i) = -5-3i$

4 $(3+4\sqrt{2}\,i)+(-3-2\sqrt{2}\,i) = (3-3)+(4\sqrt{2}\,i-2\sqrt{2}\,i)$

$= 0+2\sqrt{2}\,i$

5 $3+2-5i = 5-5i \rightarrow$

انتبه! هنا نجمع فقط (3) مع (2) حيث لايوجد تخيلي حتى نجمعه مع (5i-)

6 $\left(\frac{3}{2}-i\right)+\left(\frac{1}{5}+2i\right) = \left(\frac{3}{2}+\frac{1}{5}\right)+(-i+2i)$

$= \frac{17}{10}+i$

انتبه! تم الجمع بعد توحيد المقامات بين $\frac{1}{5}$ و $\frac{3}{2}$

ثانياً: عملية الطرح: عند الطرح يتم توزيع اشارة السالب على القوس ثم نجري عملية الجمع أو الطرح بحسب الاشارات .


مثال

جد ناتج ما يأتي :

1 $(7-13i)-(9+4i)$

$(7-13i)+(-9-4i)$

$(7-9)+(-13-4i)=-2-17i$

2 $(5+3i)-(2-4i)$

$(5+3i)+(-2+4i)$

$(5-2)+(3i+4i)=3+7i$

3 $\left(3\sqrt{2}+\sqrt{5}\,i\right)-\left(\sqrt{2}+3\sqrt{5}\,i\right)$

$\left(3\sqrt{2}+\sqrt{5}\,i\right)+\left(-\sqrt{2}-3\sqrt{5}\,i\right)$

$\left(3\sqrt{2}-\sqrt{2}\right)+\left(\sqrt{5}i-3\sqrt{5}\,i\right)=2\sqrt{2}-2\sqrt{5}\,i$

4 $3-(5-3i)$

$(3+0i)+(-5+3i)$

$(3-5)+(0i+3i)=-2+3i$

ثالثاً: عملية الضرب: عند ضرب عددين مركبين نوزع الاقواس . هنا تذكر أن $(i^2=-1)$.


مثال

جد ناتج ما يأتي :

1 $(3+2i)(5+4i)$

$15+12i+10i+8i^2$

$15+22i-8=7+22i$

((i^2 تعكس اشارة ما قبلها و تحذف))

2 $(2-3i)(3+5i)$

$6+10i-9i-15i^2$

طرح ((نعكس الاشارة وتحذف))

$6+i+15=21+i$

3 $(10+3i)(0+6i)$

$0+60i+0i+18i^2=-18+60i$

((نعكس))

4 $(2+3i)(-3+5i)$

$-6+10i-9i+15i^2$

$-6+i-15=-21+i$

5 $i(1+i)=i+i^2=-1+i$

6 $\frac{-5}{2}(4+3i)=\left(\frac{-5}{2}\times 4\right)+\left(\frac{-5}{2}\times 3i\right)$

$=-10-\frac{15}{2}i$

رابعاً: عملية القسمة: قبل التطرق الى القسمة يجب التعرف على مُرافق العدد المركب .

مُرافق العدد المركب :

هو عكس اشارة الجزء التخيلي للعدد المركب فقط . نرمز له بالرمز $\overline{C}$.

$$C = a + bi \Rightarrow \overline{C} = a - bi$$

$$C_1 = 2 + 3i \rightarrow \overline{C_1} = 2 - 3i$$

$$C_2 = 4 + 5i \rightarrow \overline{C_2} = 4 - 5i$$

$$\overline{1 + i} = 1 - i$$

أنتبه !

$$\begin{cases} C_1 = -3 + 4i \\ C_2 = 3 - 4i \end{cases}$$

غير مترافقات لأن اشارة الجزء الحقيقي تغيرت أيضاً .

$$\begin{cases} C_1 = (3i - 5) \\ C_2 = (-3i - 5) \end{cases}$$

العددان مترافقان لأن اشارة الجزء التخيلي هي فقط التي تغيرت والاختلاف فقط في الترتيب .

عند ضرب عددان مترافقان فيكون الناتج : $(C \cdot \overline{C} = a^2 + b^2)$

^{2}(الحقيقي) + ^{2}(التخيلي)

1 $(2 + 3i)(2 - 3i) = 2^2 + 3^2$

$= 4 + 9 = 13$

أنتبه ! الجزء التخيلي بدون i فقط الرقم نأخذه

2 $(1 - i)(1 + i) = (1)^2 + (1)^2 = 2$

أنتبه ! الجزء التخيلي بدون i فقط الرقم

3 $(-2 + i)(-2 - i) = (-2)^2 + (1)^2$

$= 4 + 1 = 5$

أنتبه ! الجزء التخيلي بدون i فقط الرقم

* عند وجود البسط والمقام في الاعداد المركبة نضرب البسط والمقام في مرافق العدد المركب الموجود في المقام .

ممنوع (i) بالمقام... كل i بالمقام تعني مرافق

$$\frac{\text{مرافق المقام}}{\text{مرافق المقام}} \times \frac{\text{بسط}}{\text{مقام } (i)}$$

مثال جد ناتج ما يأتي بصيغة $a+bi$

1 $\frac{3+4i}{3-4i} = \frac{3+4i}{3-4i} \cdot \frac{3+4i}{3+4i}$ ((مترافقات))

$= \frac{9+12i+12i+16i^2}{(3)^2+(4)^2}$ ($16i^2 = -16$)

$= \frac{-7+24i}{25} = \frac{-7}{25} + \frac{24}{25}i$

2 $\frac{2-i}{3+4i} = \frac{2-i}{3+4i} \cdot \frac{3-4i}{3-4i}$

$= \frac{6-8i-3i+4i^2}{(3)^2+(4)^2}$ ($4i^2 = (-4)$)

$= \frac{2-11i}{25} = \frac{2}{25} - \frac{11}{25}i$

3 $\frac{1+i}{1-i} = \frac{1+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i}$

$= \frac{1+i+i+i^2}{(1)^2+(1)^2} = \frac{2i}{2} = i$

$= 0+i$

4 $\frac{1+2i}{-2+i} = \frac{1+2i}{-2+i} \cdot \frac{-2-i}{-2-i}$

$= \frac{-2-i-4i-2i^2}{(-2)^2+(1)^2}$ ($-2i^2 = +2$)

$= \frac{-2-5i+2}{5} = \frac{-5i}{5} = 0-i$

5 $\frac{12+i}{i} = \frac{12+i}{i} \cdot \frac{0-i}{0-i}$

$= \frac{-12i-i^2}{0+1} = \frac{1-12i}{1} = 1-12i$

6 $\frac{i}{2+3i} = \frac{i}{2+3i} \cdot \frac{2-3i}{2-3i}$

$= \frac{2i-3i^2}{(2)^2+(3)^2} = \frac{3+2i}{13}$

$= \frac{3}{13} + \frac{2}{13}i$

8 $Z=\dfrac{7+\sqrt{3}i}{1+2\sqrt{3}i}$

$Z=\dfrac{7+\sqrt{3}i}{1+2\sqrt{3}i}\cdot\dfrac{1-2\sqrt{3}i}{1-2\sqrt{3}i}$

$Z=\dfrac{7-14\sqrt{3}i+\sqrt{3}i+6}{1+12}=\dfrac{13-13\sqrt{3}i}{13}$

$Z=\dfrac{13}{13}-\dfrac{13\sqrt{3}}{13}i=1-\sqrt{3}i$

$Z=\dfrac{1-\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i}$

$Z=\dfrac{1-\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i}\cdot\dfrac{1-\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}$

$Z=\dfrac{1-\sqrt{3}i-\sqrt{3}i-3}{1+3}=\dfrac{-2-2\sqrt{3}i}{4}$

$Z=\dfrac{-2}{4}-\dfrac{2\sqrt{3}}{4}i=\dfrac{-1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

9 $\dfrac{2+3i}{1-i}\times\dfrac{1+4i}{4+i}=\dfrac{2+8i+3i-12}{4+i-4i+1}$

$\dfrac{-10+11i}{5-3i}=\dfrac{-10+11i}{5-3i}\cdot\dfrac{5+3i}{5+3i}$

$=\dfrac{-50-30i+55i-33}{5^2+3^2}=\dfrac{-83+25i}{34}=\dfrac{-83}{34}+\dfrac{25}{34}i$



خامساً: النظير الضربي هو مقلوب العدد المركب $\dfrac{1}{C}$ أو C^{-1}



مثال جد النظير الضربي لعدد $C=2-2i$ وضعه بالصيغة العادية للعدد المركب.

$\dfrac{1}{C}=\dfrac{1}{2-2i}\cdot\dfrac{2+2i}{2+2i}=\dfrac{2+2i}{2^2+2^2}=\dfrac{2+2i}{8}=\dfrac{2}{8}+\dfrac{2}{8}i$

$=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}i$

سادساً: النظير الجمعي هو عكس العدد المركب في الاشارة $(-c)$ (نعكس اشارة الجزئين الحقيقي والتخيلي).

$C=2+3i \rightarrow -C=-2-3i$

$C=-2+2i \rightarrow -C=2-2i$

← مجموع عدد مركب ونظيره الجمعي = صفر

القوس المرفوع إلى الاس

أولاً: إذا كان القوس $(a+bi)^2$ نفتح القوس مربع حدانية .

ثانياً: إذا كان القوس $(a+bi)^3$ نجزء القوس $(\quad)^1(\quad)^2$ نفتح التربيع مربع حدانية ثم نضرب الناتج بالقوس الثاني .

ثالثاً: إذا كان القوس $(a+bi)^4$ يصبح $\left[(a+bi)^2\right]^2$ ثم نفتح القوس مربع حدانية والناتج أيضاً مربع حدانية .

رابعاً: القوى الاكبر:

$(a+bi)^n =$

- n زوجي ← $\left[(a+bi)^2\right]^{\frac{n}{2}}$ ← مربع الحدانية
- n فردي ← $\left[(a+bi)^2\right]^{\frac{n-1}{2}} \cdot (a+bi)^1$ ← مربع الحدانية

تنويه : راجع السؤال (9) و (10) في صفحة (20) بما يخص الأس الفردي والسؤال الإضافي في نفس الصفحة يخص الأس الزوجي .

خامساً: إذا كان لدينا $\left(\frac{\text{بسط}}{\text{مقام}}\right)^n$ حيث نتخلص من المشكلة الداخلية بالدرجة الأولى (المرافق) ثم نتخلص من المشكلة الخارجية وهو الأس

$\left(\frac{\text{بسط}}{\text{مقام فيه } (i)}\right)^n$ ← مشكلة خارجية

مشكلة داخلية نبدأ بحلها عن طريق الضرب بالمرافق

تنويه : راجع المثال (6) في صفحة (16) والسؤال (2) في صفحة (19) بما يخص الملاحظة (خامساً) .

مثال 1 ضع بالصيغة العادية $(3+4i)^2$

* نفتح التربيع مربع حدانية

i^2 تحذف وتعكس اشارة ما قبلها

$(3+4i)^2 = 9+24i+16i^2$

$= 9+24i-16 = -7+24i$

مثال 2 ضع بالصيغة العادية للعدد المركب :

$(2+3i)^2 + (12+2i)^2$

$(4+12i+9i^2) + (144+48i+4i^2)$

$4+12i-9+144+48i-4$

$(4-9+144-4) + (12i+48i) = 135+60i$



حقيقي تخيلي

مثال 3 ضع بصورة $a+bi$

$(1+i)^2 + (1-i)^2$

$(1+2i+i^2) + (1-2i+i^2)$

$(\cancel{1}+2i-\cancel{1}) + (\cancel{1}-2i-\cancel{1}) = 0+0i$

مثال 4 ضع بصورة $a+bi$

$(1+i)^4 - (1-i)^4$

$[(1+i)^2]^2 - [(1-i)^2]^2$

$(\cancel{1}+2i-\cancel{1})^2 - (\cancel{1}-2i-\cancel{1})^2$

$(2i)^2 - (-2i)^2$

$4i^2 - 4i^2 = 0+0i$

مثال 5 ضع بالصيغة العادية للعدد المركب :

$(1+i)^3 + (1-i)^3$

$(1+i)^2(1+i) + (1-i)^2(1-i)$

$(\cancel{1}+2i-\cancel{1})(1+i) + (\cancel{1}-2i-\cancel{1})(1-i)$

$2i(1+i) - 2i(1-i)$

$\cancel{2i}+2i^2-\cancel{2i}+2i^2 = 4i^2 = -4+0i$

مثال 6 ضع بصورة $a+bi$ $\left(\frac{3+i}{1+i}\right)^3$

تحليل السؤال لدينا مشكلتين في السؤال داخلية وخارجية

$\left(\frac{3+i}{1+i}\right)^3$

الداخلية (i) بالمقام

الخارجية هي بالتكعيب

نفكر بحل المشكلة الداخلية وهي (i) المقام وذلك عن طريق الضرب بالمرافق

$\left(\frac{3+i}{1+i}\right)^3 = \left(\frac{3+i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}\right)^3$



ينزل كما هو

$= \left(\frac{3-3i+i+1}{1+1}\right)^3 = \left(\frac{4-2i}{2}\right)^3$

$= \left(\frac{4}{2}-\frac{2i}{2}\right)^3 = (2-i)^3$

الان نتخلص من الخارجية وهي التكعيب

$= (2-i)^3 = (2-i)^2(2-i)$

$= (4-4i-1)(2-i)$

$= (3-4i)(2-i)$ توزيع

$= 6-3i-8i-4$

$= 2-11i$

أمثلة من نمط أخر

مثال 1

اثبت ان :

$$(1-i)\ (1-i^2)\ (1-i^3)=4$$

الطرف الايسر $=(1-i)\big(1-(-1)\big)\big(1-(-i)\big)$

$=(1-i)\ (1+1)\ (1+i)$

$=2\ (1-i)\ (1+i)$ مترافقات

2013 / د 1

$=2\ (1+1)=2\ (2)$

$=4=$ الطرف الايمن

مثال 2

اثبت ان :

$$\frac{1}{(2-i)^2}-\frac{1}{(2+i)^2}=\frac{8}{25}i$$

تحليل السؤال

المشكلة	الحل
1 وجود قوس تربيع	نفتح التربيع مربع حدانية
2 وجود (i) بالمقام	نضرب الكسر بالمرافق
3 وجود عملية طرح	نطرح الناتجين

نفتح التربيع الذي بالمقام

الطرف الايسر $=\frac{1}{4-4i+\underset{(-1)}{i^2}}-\frac{1}{4+4i+\underset{(-1)}{i^2}}$

$=\frac{1}{4-4i-1}-\frac{1}{4+4i-1}$

$=\frac{1}{3-4i}-\frac{1}{3+4i}$

نضرب كل كسر بالمرافق (مشكلة 2)

$=\frac{1}{3-4i}\cdot\frac{3+4i}{3+4i}-\frac{1}{3+4i}\cdot\frac{3-4i}{3-4i}$

$=\frac{3+4i}{9+16}-\frac{3-4i}{9+16}$

$=\frac{\cancel{3}+4i-\cancel{3}+4i}{25}=\frac{8}{25}i$

$=$ الطرف الايسر

مثال 3

إثبت أن

$$\frac{(1-i)^2}{1+i}+\frac{(1+i)^2}{1-i}=-2$$

2012 / د 3

تحليل السؤال

المشكلة	الحل
1 وجود قوس تربيع	نفتح التربيع مربع حدانية
2 وجود (i) بالمقام	نضرب الكسر بالمرافق
3 وجود عملية جمع	نجمع الكسرين

الطرف الايسر $=\frac{1-2i+\underline{i^2}}{1+i}+\frac{1+2i+\underline{i^2}}{1-i}$

$=\frac{\cancel{1}-2i\cancel{-1}}{1+i}+\frac{\cancel{1}+2i\cancel{-1}}{1-i}$

$=\frac{-2i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}+\frac{2i}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i}$

$=\frac{-2i+2i^2}{1+1}+\frac{2i+2i^2}{1+1}$

$=\frac{-2i-2}{2}+\frac{2i-2}{2}$

$=\frac{-\cancel{2i}-2+\cancel{2i}-2}{2}=\frac{-4}{2}$

$=-2=$ الطرف الايمن

مثال

إذا كان $C_1 = 1 + i$, $C_2 = 3 - 2i$ تحقق من أن :

1 $\overline{C_1 + C_2} = \overline{C_1} + \overline{C_2}$

$$\overline{(1+i)+(3-2i)} = \overline{(1+i)} + \overline{(3+2i)}$$

نجمع ثم نأخذ مرافق للناتج نأخذ المرافق ثم نجمع

$$\overline{4-i} = (1-i)+(3+2i)$$

$$4+i = 4+i$$

$$R.H.S = L.H.S$$

2 $\overline{C_1 - C_2} = \overline{C_1} - \overline{C_2}$

$$\overline{(1+i)-(3-2i)} = \overline{(1+i)} - \overline{(3-2i)}$$

$$\overline{(1+i)+(-3+2i)} = (1-i)-(3+2i)$$

$$\overline{-2+3i} = (1-i)+(-3-2i)$$

$$-2-3i = -2-3i$$

$$L.H.S = R.H.S$$

3 $\overline{C_1 \cdot C_2} = \overline{C_1} \cdot \overline{C_2}$

$$\overline{(1+i)(3-2i)} = \overline{(1+i)}\ \overline{(3-2i)}$$

نضرب ثم نأخذ مرافق للناتج نأخذ المرافق ثم نضرب

$$\overline{3-2i+3i+2} = (1-i)(3+2i)$$

$$\overline{5+i} = 3+2i-3i+2$$

$$5-i = 5-i$$

$$R.H.S = L.H.S$$

4 $\overline{\left(\frac{C_1}{C_2}\right)} = \frac{\overline{C_1}}{\overline{C_2}}$

$$\overline{\left(\frac{1+i}{3-2i}\right)} = \frac{\overline{1+i}}{\overline{3-2i}}$$

$$\overline{\left(\frac{1+i}{3-2i} \cdot \frac{3+2i}{3+2i}\right)} = \frac{1-i}{3+2i} \cdot \frac{3-2i}{3-2i}$$

$$\overline{\left(\frac{3+2i+3i-2}{9+4}\right)} = \frac{3-2i-3i-2}{9+4}$$

$$\frac{1}{13} - \frac{5}{13}i = \frac{1}{13} - \frac{5}{13}i$$

$$R.H.S = L.H.S$$

إستراحة شعرية

يكفي بأني مُذ وجدتكَ صرتُ أعرفُ ما أريدْ
ووجدتُ روحي خلفَ بسمتكَ التي صارت بها
الأيامُ عيدْ
بالله قُلْ لي... كيفَ احلمُ بالمزيدْ؟!

أسئلة وزارية حول الحالات السابقة


سؤال 1 ضع بالصورة العادية للعدد المركب :

1998 - د (1)

$$(1+3i)^2+(3-2i)^2$$

$$(1+6i-9)+(9-12i-4)$$

$$(-8+6i)+(5-12i)$$

$$(-8+5)+(6i-12i)=-3-6i$$


سؤال 2 ضع بالصورة العادية للعدد المركب :

1999 - د (1)

$$\left(\frac{3-i}{1+i}\right)^2=\left(\frac{3-i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}\right)^2$$

$$=\left(\frac{3-3i-i-1}{1+1}\right)^2$$

$$=\left(\frac{2-4i}{2}\right)^2=(1-2i)^2$$

$$=1-4i-4=-3-4i$$

سؤال 3 إذا كان $x=2+3i$, $y=3-i$ جد قيمة x^2+2y^2

نعوض x ، y بالعلاقة اعلاه

2000 - د (1)

$$(2+3i)^2+2(3-i)^2$$

$$(4+12i-9)+2(9-6i-1)$$

$$-5+\cancel{12i}+18-\cancel{12i}-2=11+0i$$


سؤال 4 ضع ما يأتي بالصيغة العادية ثم جد نظيره الضربي .

2002 - د (1)

$$(3+2i)(-2+i)$$

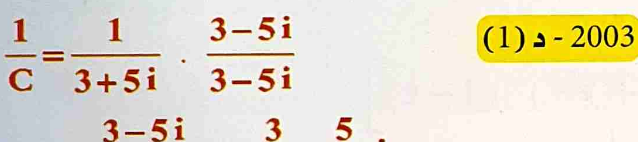
$$-6+3i-4i-2=-8-i$$

$$\frac{1}{C}=\frac{1}{-8-i}\cdot\frac{-8+i}{-8+i}$$

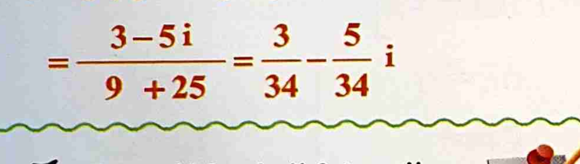
$$=\frac{-8+i}{64+1}=\frac{-8}{65}+\frac{1}{65}i$$


سؤال 5 جد النظير الضربي للعدد المركب ($3+5i$) ثم ضعه بالصيغة العادية .

2003 - د (1)



$$\frac{1}{C}=\frac{1}{3+5i}\cdot\frac{3-5i}{3-5i}$$



$$=\frac{3-5i}{9+25}=\frac{3}{34}-\frac{5}{34}i$$

سؤال 6 جد الصيغة العادية للعدد المركب :

2004 - د (2)

$$\left(1-\sqrt{3}i\right)^2-\left(2-\sqrt{3}i\right)^2$$

$$\left(1-2\sqrt{3}i-3\right)-\left(4-4\sqrt{3}i-3\right)$$

$$\left(-2-2\sqrt{3}i\right)-\left(1-4\sqrt{3}i\right)$$

$$\left(-2-2\sqrt{3}i\right)+\left(-1+4\sqrt{3}i\right)=-3+2\sqrt{3}i$$


سؤال 7 جد ناتج ما يأتي بالصيغة الديكارتية :

2005 - د (1)

$$(3+4i)^2+(5-3i)(1+i)$$

$$(9+24i-16)+(5+5i-3i+3)$$

$$(-7+24i)+(8+2i)$$

$$(-7+8)+(24i+2i)=1+26i$$

$$(1,26)$$




سؤال 8 إذا كان $x = 2i - 1$ جد قيمة $x^2 + 2x + 6$

2000 خارج القطر

$x = -1 + 2i$ (ترتيب)

تعويض بالعلاقة $(-1+2i)^2 + 2(-1+2i) + 6$ (مربع حدانية، توزيع)

تبسيط واختصار $1 - 4i - 4 - 2 + 4i + 6$

الناتج $= 1 + 0i$

سؤال 9 ضع المقدار $\frac{(1-i)^{13}}{64}$ بالصيغة العادية .

2013 خارج القطر

$$\frac{(1-i)^{13}}{64} = \frac{\left[(1-i)^2\right]^6 . (1-i)}{64}$$

$$= \frac{(1 - 2i - 1)^6 (1-i)}{64} = \frac{(-2i)^6 (1-i)}{64}$$

$$= \frac{64 i^6 (1-i)}{64} = -1(1-i) = -1 + i$$

سؤال 10 ضع بالصورة العادية للعدد المركب $(1+i)^5 - (1-i)^5$

2012 - د (2)

$$= \left[(1+i)^2\right]^2 (1+i) - \left[(1-i)^2\right]^2 (1-i)$$

$$= \left[(1 + 2i + i^2)^2 (1+i)\right] - \left[(1 - 2i + i^2)^2 (1-i)\right]$$

$$= \left[(2i)^2 (1+i)\right] - \left[(-2i)^2 (1-i)\right]$$

$$= \left[4i^2 (1+i)\right] - \left[4i^2 (1-i)\right]$$

$$= \left[-4(1+i)\right] - \left[-4(1-i)\right]$$

$$= -4 - 4i - (-4 + 4i)$$

$$= -4 - 4i + 4 - 4i = 0 - 8i$$

سؤال 11 ضع بصورة $a + bi$

إضافي

$$\frac{(1+i)^{12}}{32}$$

$$\frac{(1+i)^{12}}{32} = \frac{\left[(1+i)^2\right]^6}{32} = \frac{(1 + 2i - 1)^6}{32}$$



$$= \frac{(2i)^6}{32} = \frac{64 i^6}{32} = -2 + 0i$$

التحليل في مجموعة الاعداد المركبة

أولاً: مجموع مربعين : عندما يكون لدينا مجموع مربعين $(x^2 + y^2)$ نضرب الحد الثاني

بـ $(-i^2)$ ثم يصبح فرق بين مربعين ونحلل .

أي : نضع i^2 مع الحد الثاني ونعكس اشارته .

1 $x^2 + y^2$

$x^2 - y^2 i^2 = (x - yi)(x + yi)$

2 $x^2 + 4$

$x^2 - 4i^2 = (x - 2i)(x + 2i)$

3 $a^2 + 36b^2$

$a^2 - 36b^2 i^2 = (a + 6bi)(a - 6bi)$

4 $y^2 + 100$

$y^2 - 100i^2 = (y - 10i)(y + 10i)$

ملاحظة إذا طلب في السؤال تحليل عدد الى حاصل ضرب عددين مركبين يكون التحليل كما ورد اعلاه . (مجموع مربعين) .

$1^2=1$	$6^2=36$	$11^2=121$
$2^2=4$	$7^2=49$	$12^2=144$
$3^2=9$	$8^2=64$	$13^2=169$
$4^2=16$	$9^2=81$	$14^2=196$
$5^2=25$	$10^2=100$	$15^2=225$

* عندما يعطي في السؤال رقم نبحث عن عددين من الارقام اعلاه عند جمعهم يعطي العدد الذي في السؤال ويصبح مجموع مربعين .

مثلاً: العدد 25 ← 16+9

العدد 85 ← 81+4

وبعدها نغير اشارة الـ + الى - ونضع i^2 ونحلل كما في الامثلة:

مثال حلل كل مما يأتي الى حاصل ضرب عاملين بصورة a+bi

1

$10 = 9 + 1$
$= 9 - i^2$
$= (3 - i)(3 + i)$

أو

$10 = 1 + 9$
$= 1 - 9i^2$
$= (1 - 3i)(1 + 3i)$

2

$29 = 25 + 4$
$= 25 - 4i^2$
$= (5 - 2i)(5 + 2i)$

أو

$29 = 4 + 25$
$= 4 - 25i^2$
$= (2 - 5i)(2 + 5i)$

3

$41 = 25 + 16$
$= 25 - 16i^2$
$= (5 - 4i)(5 + 4i)$

أو

$41 = 16 + 25$
$= 16 - 25i^2$
$= (4 - 5i)(4 + 5i)$

4

$53 = 4 + 49$
$= 4 - 49i^2$
$= (2 - 7i)(2 + 7i)$

أو

$53 = 49 + 4$
$= 49 - 4i^2$
$= (7 - 2i)(7 + 2i)$

5

$85 = 81 + 4$
$= 81 - 4i^2$
$= (9 - 2i)(9 + 2i)$

أو

$85 = 4 + 81$
$= 4 - 81i^2$
$= (2 - 9i)(2 + 9i)$

6

$125 = 121 + 4$
$= 121 - 4i^2$
$= (11 - 2i)(11 + 2i)$

أو

$125 = 4 + 121$
$= 4 - 121i^2$
$= (2 - 11i)(2 + 11i)$

الصفحة للإطلاع فقط

ثانياً: مجموع مكعبين / فرق بين مكعبين : نضرب الحد الثاني بـ ($-i^2$) ثم نحلل (فرق / مجموع) مكعبين .

تذكّر قانون مكعبين

$x^3 - 27i$ → $-i^2$

$x^3 + 27i^3 = (x+3i)(x^2 - 3xi - 9)$

مربع الأول (عكس الاشارة) الأول × الثاني + مربع الثاني

ثالثاً: التجربة : في حالة وجود (i) في الحد الوسط نضرب الأخير بـ ($-i^2$) ثم نحلل تجربه .

أنظر

$x^2 - 3ix + 4$

$x^2 - 3ix - 4i^2 = (x+i)(x-4i)$

$x^2 + xi + 6$

$x^2 + xi - 6i^2 = (x+3i)(x-2i)$

رابعاً: اكمال المربع: عندما لا يحلل السؤال بالتجربة ولا يوجد (i) في الوسط نضيف $\left(\frac{1}{2} \text{ معامل } x\right)^2$ ونطرحهُ.

$x^2 + 6x + 25$ معامل x هو (3)

$(x^2 + 6x + 9) - 9 + 25$ تربيع (3) هو 9

نضيف 9 ونطرح 9

$(x+3)^2 + 16$ أصبح مجموع مربعين

$(x+3)^2 - 16i^2$

$(x+3+4i)(x+3-4i)$

ايجاد قيم $x , y \in R$

أولاً: أنظر إلى السؤال بتركيز وقمْ بحل المشاكل وكما موضح في الجدول ادناه.

المشكلة	طريقة حل المشكلة	نموذج من الأسئلة المحلولة
الأقواس ( ) ( )	توزيع الاقواس	مثال (4) و (6)
$\left(\frac{\text{بسط}}{\text{مقام}}\right)$	نضرب بالمرافق	مثال (7)
$(a+bi)^n$	نبسط حسب ملاحظات صفحة (13)	سؤال (3) وزاريات
وجود التحليل	نحلل حسب الملاحظات حسب صفحة (19)	مثال (8)

تنويه من الممكن ان يحوي السؤال أكثر من مشكلة.

ثانياً: حاول تصفية الطرفين بحيث يصبح

الحقيقي = الحقيقي

التخيلي = التخيلي (نأخذ المعاملات فقط بدون i)

ثالثاً: انتبه لوجود التحليل "فرق مربعين / تجربة / عدد ... الخ"

رابعاً: لا تقوم بضرب المرافق في حالة وجود x أو y في البسط أو المقام وحاول أن تجد مخرج أخر لحل السؤال حسب الصيغة.

خامساً: إذا أعطى في السؤال مقدارين وذكر عبارة ان المقدارين مترافقان نقوم بوضع علامة (=) بين المقدارين مع تغيير اشارات كل الأجزاء التخيلية ولأحد الأطراف فقط ثم نكمل الحل كسؤال اعتيادي.

تنويه راجح المثال (9) و (10) في الصفحة 28 و 29

مثال 1

جد قيم y ، x الحقيقتين :

التخيلي = التخيلي

$$3x + 4i = 2 + 8yi$$

الحقيقي = الحقيقي

$$(3x = 2) \div 3 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

$$(8y = 4) \div 8 \Rightarrow y = \frac{4}{8} \Rightarrow y = \frac{1}{2}$$



مثال 2

جد قيم $x, y \in R$

$$2y + 1 - (2x - 1)i = -8 + 3i$$

تخيلي

$$(2y + 1) - (2x - 1)i = -8 + 3i$$

حقيقي

$$2y + 1 = -8 \Rightarrow 2y = -8 - 1$$

$$[2y = -9] \div 2$$

$$y = \frac{-9}{2}$$

$$-(2x - 1) = 3$$

$$-2x + 1 = 3 \Rightarrow -2x = 3 - 1$$

$$[-2x = 2] \div -2$$

$$x = -1$$

مثال 3

جد قيم $x, y \in R$

تخيلي

$$2x - 1 + 2i = 1 + (y + 1)i$$

حقيقي

$$2x - 1 = 1 \Rightarrow 2x = 1 + 1 \Rightarrow [2x = 2] \div 2$$

$$\Rightarrow x = 1$$

$$y + 1 = 2 \Rightarrow y = 2 - 1 \Rightarrow y = 1$$

مثال 4

جد قيم $x, y \in R$

$$y + 5i = (2x + i)(x + 2i)$$

تحليل السؤال

1. الطرف الايسر y+5i لا يحوي اي مشاكل (ينزل نصاً)
2. الطرف الايمن (2x+i) (x+2i) فيه اقواس تحتاج توزيع .

$$y + 5i = (2x + i)(x + 2i)$$

$$y + 5i = 2x^2 + 4xi + xi - 2$$

$$y + 5i = (2x^2 - 2) + 5xi$$

$$y = 2x^2 - 2 \;..... (1)$$

$$[5 = 5x] \div 5 \Rightarrow x = 1$$

نعوض

$$y = 2x^2 - 2$$

$$y = 2(1)^2 - 2 \Rightarrow y = 2 - 2$$

$$y = 0$$



جد قيم $x, y \in R$

$$\frac{1-i}{1+i} + x + yi = (i+2i)^2$$

تحليل السؤال

1. $\frac{1-i}{1+i}$ ← نضرب الكسر بالمرافق
2. $x + yi$ ← ينزل (بدون مشاكل)
3. $(1+2i)^2$ ← التربيع مربع حدانية

$$\left(\frac{1-i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i}\right) + x + yi = 1 + 4i - 4$$

$$\frac{\cancel{1} - i - i - \cancel{1}}{1+1} + x + yi = -3 + 4i$$

$$\frac{-\cancel{2}i}{\cancel{2}} + x + yi = -3 + 4i$$

$$-i + x + yi = -3 + 4i$$

2012 - د (1) / خارج

2015 - تمهيدي

$$x + yi = -3 + 4i + i$$

$$\boxed{x} + \textcircled{y}i = \boxed{-3} + \textcircled{5}i$$

$$\boxed{x = -3}\ ,\ \boxed{y = 5}$$



جد قيم $x, y \in R$

$$8i = (x+2i)(y+2i) + 1$$

تحليل السؤال

1. $8i$ ← لاتوجد مشكلة في الطرف الايسر
2. $(x+2i)(y+2i)$ ← أقواس تتوزع

$$0 + 8i = (x+2i)(y+2i) + 1$$

$$0 + 8i = xy + 2xi + 2yi - 4 + 1$$

$$0 + 8i = (xy - 3) + 2xi + 2yi$$

الحقيقي = الحقيقي ← $0 = xy - 3$

$$[xy = 3] \div x \Rightarrow y = \boxed{\frac{3}{x}} \quad ...(1)$$

التخيلي = التخيلي $[2x + 2y = 8] \div 2$

$$\boxed{x + y = 4} \quad ..... (2)$$

يعوض معادلة (1) في (2)

$$\left[x + \frac{3}{x} = 4\right] . x$$

$$x\,(x) + \frac{3}{x}(x) = 4\,(x)$$

$$x^2 + 3 = 4x \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$(x-3)(x-1) = 0$$

أما $x - 3 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 3}$

أو $x - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 1}$

عندما $x = 3 \rightarrow y = \frac{3}{x} = \frac{3}{3} \Rightarrow \boxed{y = 1}$

عندما $x = 1 \rightarrow y = \frac{3}{x} = \frac{3}{1} \Rightarrow \boxed{y = 3}$

مثال 7

جد قيم $x, y \in R$

$$\left(\frac{2-i}{1+i}\right)x+\left(\frac{3-i}{2+i}\right)y=\frac{1}{i}$$

تحليل السؤال

نضرب الكسر بالمرافق $\longrightarrow \left(\frac{2-i}{1+i}\right)$ ①

نضرب الكسر بالمرافق $\longrightarrow \left(\frac{3-i}{2+i}\right)$ ②

نضرب بـ (i^4) أو بالمرافق $\longrightarrow \frac{1}{i}$ ③

مُرافق مُرافق

$$\left(\frac{2-i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}\right)x+\left(\frac{3-i}{2+i}\cdot\frac{2-i}{2-i}\right)y=\frac{1}{i}\cdot(i^4)$$

$$\left(\frac{2-2i-i-1}{1+1}\right)x+\left(\frac{6-3i-2i-1}{4+1}\right)y=i^3$$

$$\left(\frac{1-3i}{2}\right)x+\left(\frac{5-5i}{5}\right)y=-i$$

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i\right)x+(1-i)y=0-i$$

$$\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}xi+y-yi=0-i$$

$$\left[\frac{1}{2}x+y=0\right].2 \Rightarrow x+2y=0 \quad \text{........(1)}$$

$$\left[\frac{-3}{2}x-y=-1\right].2 \Rightarrow -3x-2y=-2 \quad \text{.....(2)}$$

بحل المعادلتين انياً

$$x+2y=0$$
$$-3x-2y=-2$$

بالجمع

2004 - د (2)

2005 - د (2)

$$-2x=-2 \overset{\div(-2)}{\Rightarrow} x=1$$

$$1+2y=0 \Rightarrow 2y=-1 \overset{\div 2}{\Rightarrow} y=\frac{-1}{2}$$

مثال 8

جد قيم $x, y \in R$

$$\frac{y}{1+i}=\frac{x^2+4}{x+2i}$$

2018 - تمهيدي أحيائي

* راجع تحليل مجموع مربعين (x^2+4)

$$\frac{y}{1+i}=\frac{x^2-4i^2}{x+2i}$$

$$\frac{y}{1+i}=\frac{(x-2i)\cancel{(x+2i)}}{\cancel{(x+2i)}}$$

$$y=(x-2i)(1+i)$$

$$y+0i=x+xi-2i+2$$

$$y+0i=(x+2)+(x-2)i$$

حقيقي تخيلي

$$x-2=0 \Rightarrow x=2$$

$$y=x+2$$

$$y=2+2 \Rightarrow y=4$$

مثال 9 إذا كان $\frac{x-yi}{1+5i}$ ، $\frac{3-2i}{i}$ مترافقان

فجد قيم y ، x الحقيقيتين

تنويه

نتبع الملاحظة خامساً في صفحة (24) حيث نضع مساواة (=) بين الكسرين بشرط ان نغير اشارة كل الاجزاء التخيلية لواحد من الاطراف فقط (انتبه واحد من الاطراف وليس الطرفين).

$$\frac{x+yi}{1-5i} = \frac{3-2i}{i}$$

الطرف ثابت الإشارة

غيرنا اشارة الاجزاء التخيلية للطرف بكامله.

طريقة (1)

$$\frac{x+yi}{1-5i} = \left(\frac{3-2i}{i} \cdot \frac{-i}{-i}\right)$$

$$\frac{x+yi}{1-5i} = \frac{-3i+2i^2}{0+1}$$

$$x+yi = (-2-3i)(1-5i)$$

$$x+yi = -2+10i-3i-15$$

$$x+yi = -17+7i$$

$\boxed{x=-17}$, $\boxed{y=7}$

طريقة (2)

طرفين × وسطين $\frac{3-2i}{i} \times \frac{x-yi}{1+5i}$

$$i(x+yi) = (3-2i)(1-5i)$$

توزيع   توزيع

$$xi+yi^2 = 3-15i-2i+10i^2$$

$$xi-y = 3-17i-10$$

منحني = تخيلي

$$xi - y = -7 - 17i$$

حقيقي = حقيقي

$-y=-7 \Rightarrow \boxed{y=7}$

$\boxed{x=-7}$

2016 - د (3)

2017 - د (3)/احيائي

10 مثال جد قيم $x, y \in R$ إذا علمت ان $\frac{6}{x+yi}$, $\frac{3+i}{2-i}$ مترافقان

$$\frac{6}{x+yi} = \frac{3-i}{2+i}$$

الطرف ثابت الإشارة

غيرنا اشارة الاجزاء التخيلية للطرف بكامله.

$$\frac{6}{x+yi} = \left(\frac{3-i}{2+i} \cdot \frac{2-i}{2-i}\right)$$

$$\frac{6}{x+yi} = \frac{6-3i-2i-1}{(2)^2+(1)^2}$$

طريقة (1)

$$\frac{6}{x+yi} = \frac{5-5i}{5}$$

$$\frac{6}{x+yi} = 1-i \Rightarrow (x+yi)(1-i) = 6$$

$$x+yi = \frac{6}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i}$$

$$x+yi = \frac{6+6i}{1+1}$$

$$x+yi = \frac{6+6i}{2}$$

$$x+yi = 3+3i$$

$x = 3$, $y = 3$

$\frac{3+i}{2-i}$, $\frac{6}{x+yi}$ مترافقان

طريقة (2)

طرفين × وسطين $\frac{3+i}{2-i} = \frac{6}{x+yi}$

$$(x+yi)(3-i) = 6(2+i)$$

مجهول معامل

$$x+yi = \frac{6(2+i)}{3-i}$$

المظروب في المجهول مقام

$$x+yi = \frac{12+6i}{3-i} \cdot \frac{3+i}{3+i}$$

$$x+yi = \frac{36+12i+18i-6}{9-1}$$

$$x+yi = \frac{30+30i}{10} = \frac{30}{10} + \frac{30i}{20}$$

$$x+yi = 3+3i$$

$x = 3$ $y = 3$

2015 - د (3)

2017 - تمهيدي / احيائي

مجموعة من الأسئلة الوزارية حول موضوع إيجاد قيم $x , y \in R$

سؤال 1

جد قيمتي x , y التي تحقق

1996 - د (1)

$$(2x+i)(y-2i)=-2-9i$$

$$2xy-4xi+yi+2=-2-9i$$

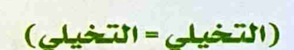
$$(2xy+2)+(-4x+y)i=-2-9i$$

(الحقيقي = الحقيقي)

$$2xy+2=-2$$

$$2xy=-2-2 \Rightarrow [2xy=-4] \div 2x$$

$$y=\frac{-2}{x} \quad \dots\dots (1)$$



(التخيلي = التخيلي)

$$-4x+y=-9 \quad \dots\dots (2)$$

بتعويض (1) في (2) ينتج

$$\left[-4x+\left(\frac{-2}{x}\right)=-9\right] . x$$

$$-4x^2-2=-9x \Rightarrow 4x^2-9x+2=0$$

$$(4x-1)(x-2)=0$$

أما $4x-1=0 \Rightarrow [4x=1] \div 4 \Rightarrow x=\frac{1}{4}$

أو $x-2=0 \Rightarrow x=2$

نعوض x في (1) لايجاد y

$$y=\frac{-2}{x}=\frac{-2}{\frac{1}{4}}=-8 \quad , \quad y=\frac{-2}{2}=-1$$

x	y
$\frac{1}{4}$	-8
2	-1



سؤال 2

جد قيم $x , y \in R$ التي تحقق

2000 - د (2)

$$x(x+i)+y(y-i)+i=13$$

$$x^2+xi+y^2-yi=13-i$$

$$(x^2+y^2)+(x-y)i=13-i$$

حقيقي تخيلي

$$x^2+y^2=13 \quad \dots\dots (1)$$

$$x-y=-1 \Rightarrow x=-1+y \quad \dots\dots (2)$$

نعوض (2) في (1) لينتج

$$(-1+y)^2+y^2=13$$

$$1-2y+y^2+y^2-13=0$$

$$[2y^2-2y-12=0] \div (2)$$

$$y^2-y-6=0 \quad \text{تجربة}$$

$$(y+2)(y-3)=0$$

أما $y+2=0 \Rightarrow y=-2$

أو $y-3=0 \Rightarrow y=3$

نعوض y في معادلة (1)

$$x=-1+y$$

عندما $y=-2 \Leftarrow x=-1+(-2)$

$$x=-3$$

عندما $y=3 \Leftarrow x=-1+3$

$$x=2$$

x	y
-3	-2
2	3

سؤال 3 جد قيمتي $x, y \in R$ التي تحقق

2009 تمهيدي

$$(3+2i)^2 \; y = (x+3i)^2$$

$$(9+12i-4)\,y = x^2 + 6xi - 9$$

$$(5+12i)\,y = (x^2-9) + 6xi$$

$$5y + 12yi = (x^2-9) + 6xi$$

(الحقيقي = الحقيقي) $5y = x^2 - 9 \quad \ldots\ldots (1)$

تعويض

(التخيلي = التخيلي) $12y = 6x \Rightarrow x = 2y \quad \ldots\ldots (2)$

نعوض (2) في (1)

$$5y = (2y)^2 - 9$$

$$5y = 4y^2 - 9 \Rightarrow 4y^2 - 5y - 9 = 0$$

$$(4y-9)(y+1) = 0$$

أما $4y - 9 = 0 \Rightarrow [4y = 9] \div 4 \Rightarrow y = \frac{9}{4}$

أو $y + 1 = 0 \Rightarrow y = -1$

نعوض y في معادلة (2)

$$x = 2y = 2\left(\frac{9}{4}\right) \Rightarrow x = \frac{9}{2}$$

$$x = 2y = 2(-1) \Rightarrow x = -2$$

x	y
$\frac{9}{2}$	$\frac{9}{4}$
-2	-1

سؤال 4 جد قيم $x, y \in R$ والتي تحقق:

1999 - د (2)

$$(3x+2yi)^2 = \frac{200}{4+3i}$$

$$9x^2 + 12xyi - 4y^2 = \frac{200}{4+3i} \cdot \frac{4-3i}{4-3i}$$

$$(9x^2 - 4y^2) + 12xyi = \frac{800-600i}{(4)^2+(3)^2}$$

$$(9x^2 - 4y^2) + 12xyi = \frac{800}{25} - \frac{600}{25}i$$

$$(9x^2 - 4y^2) + 12xyi = 32 - 24i$$

$$9x^2 - 4y^2 = 32 \quad \ldots\ldots (1)$$

$$[12xy = -24] \div 12x \Rightarrow y = \frac{-2}{x} \quad \ldots\ldots (2)$$

نعوض (2) في (1)

$$9x^2 - 4\left(\frac{-2}{x}\right)^2 = 32 \Rightarrow \left[9x^2 - \frac{16}{x^2} = 32\right] . x^2$$

$$9x^4 - 16 = 32x^2 \Rightarrow 9x^4 - 32x^2 - 16 = 0$$

$$(9x^2+4)(x^2-4) = 0$$

أما $9x^2 + 4 = 0$ يُهمل $\notin R$

أو $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4$ بالجذر

$$x = \pm 2$$

$$y = \frac{-2}{x} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$y = \frac{-2}{x} = \frac{-2}{-2} = 1$$

x	y
2	-1
-2	1



سؤال 5 جد قيمتي x، y الحقيقيتين التي تحقق المعادلة :

2016 تمهيدي

$$\left(\frac{125}{11+2i}\right)x+(1-i)^2\ y=11$$

$$\left(\frac{125}{11+2i}\cdot\frac{11-2i}{11-2i}\right)x+(1-2i-1)\,y=11$$

$$\left(\frac{125(11-2i)}{(11)^2+(2)^2}\right)x-2yi=11$$

$$\left(\frac{125(11-2i)}{125}\right)x-2yi=11$$

$$(11-2i)x-2yi=11+0i$$

$$11x-2xi-2yi=11+0i$$

$$(11x)+(-2x-2y)i=11+0i$$

$$[11x=11]\div 11\Rightarrow x=1$$

(حقيقي = حقيقي)

$$[-2x-2y=0]\div -2$$

(تخيلي = تخيلي)

$$x+y=0$$

$$1+y=0\Rightarrow y=-1$$



سؤال 6 جد قيمتي $x, y\in R$ والتي تحقق :

2008 - د (2)

$$y+5i=(2x+i)(x+i)$$

$$y+5i=2x^2+2xi+xi-1$$

$$y+5i=(2x^2-1)+3xi$$

$$y=2x^2-1\ \ \ldots\ldots(1)$$

تعويض

$$3x=5\Rightarrow x=\frac{5}{3}$$

$$y=2\left(\frac{5}{3}\right)^2-1\Rightarrow y=\frac{50}{9}-1$$

$$y=\frac{41}{9}$$

ووقفتُ حينَ لقائهِ متسائلاً
هل يقدرُ الشعراءُ وصفِ كمالهِ
سبحانَ من سوّى الجمالَ بوجههِ
وتقاسمَ الباقونَ ثلثَ جمالهِ





سؤال 7 جد قيمتي $x, y \in R$ إذا علمت:

2016 - د (2)

$$(x+2i)(x-i)=\frac{121+9y^2}{11+3yi}$$

$$x^2-xi+2xi+2=\frac{121-9y^2i^2}{11+3yi}$$

$$(x^2+2)+xi=\frac{(11+3yi)(11-3yi)}{(11+3yi)}$$

تخيلي = تخيلي

$$(x^2+2)+xi=11-3yi$$

حقيقي = حقيقي

$x^2+2=11 \Rightarrow x^2=11-2 \Rightarrow x^2=9$ بالجذر

$\boxed{x=\mp 3}$

$$x=-3y\div -3 \Rightarrow y=\frac{x}{-3}=\frac{\mp 3}{-3}$$

$\boxed{y=\pm 1}$



سؤال 8 جد قيمتي $x، y$ الحقيقيتين التي تحقق:

1998 - د (2)

$$(2+xi)(-x+i)=\frac{9y^2+49}{3y+7i}$$

$$-2x+2i-x^2i-x=\frac{9y^2-49i^2}{3y+7i}$$

$$-3x+(2-x^2)i=\frac{(3y+7i)(3y-7i)}{(3y+7i)}$$

$$-3x+(2-x^2)i=3y-7i$$

$[-3x=3y]\div 3 \Rightarrow y=-x$ .... (1)

$2-x^2=-7 \Rightarrow 2+7=x^2$

$x^2=9$ بالجذر

$x=\pm 3$

$y=-x$

$\boxed{y=-3} \Leftarrow \boxed{x=3}$ عندما

$y=-(-3) \Leftarrow \boxed{x=-3}$ عندما

$\boxed{y=3}$



....

....

....

....

....

....

....

الجذور التربيعية للعدد المركب

* كل i موجودة تحت الجذر التربيعي يتم حل السؤال عن طريق الفرضية وقبل بحل السؤال يجب وضع العجج المركب بابسط صورة (الصيغة العادية).

الفرضية $\sqrt{a+bi} = x+yi$

تربيع الطرفين $a+bi = (x+yi)^2$

فتح التربيع $a+bi = x^2 + 2xyi - y^2$ $\Rightarrow$ $a+bi = (x^2 - y^2) + 2xyi$ ((ثابتة في الحل))

ترتيب

حقيقي = حقيقي $x^2 - y^2 = a$ ....(1)

تخيلي = تخيلي $2xy = b$ ......(2)

بحل المعادلتين بالتعويض وإيجاد y ، x

الناتج:

$C = \mp(\ x \bigcirc\ y\, i\ )$

قيمة x، قيمة y

اشارة الجزء التخيلي من السؤال

ملاحظة

تم حل المثال الاول بخطوات تفصيلية مع الشرح وباقي الامثلة بخطوات نموذجية يمكن للطالب ضبط الخطوات من المثال الاول وحل باقي الامثلة على ضوء المثال الأول.

الرياضيات


مثال جد الجذور التربعية للعدد الحركي :

1 $8+6i$

* نبدأ الحل مباشرة لأن العدد 8+6i بالصيغة العادية وهو يريد الجذر التربيعي أي $\sqrt{8+6i}$

$$\sqrt{8+6i} = x+yi$$

العدد من السؤال ← فرضية من عندنا ←

الان نقوم بتربيع الطرفين

$$8+6i = (x+yi)^2$$

يلغي الجذر ← الطرف يصبح اس (2) ←

ثم نفتح التربيع (الايمن)

$$8+6i = x^2+2xyi-y^2$$

$$8+6i = (x^2-y^2)+2xyi$$

حقيقي تخيلي حقيقي تخيلي

وبعدها الحقيقي=الحقيقي

$$\boxed{x^2-y^2=8} \quad .....(1)$$

ثم التخيلي = التخيلي

$$[2xy=6] \div 2x$$

دائماً هنا في الموضوع نقسم على 2x

نعوض معادلة (2) في (1)

$$y=\frac{6}{2x} \Rightarrow \boxed{y=\frac{3}{x}} \quad .... (2)$$

$$x^2-y^2=8 \Rightarrow x^2-\left(\frac{3}{x}\right)^2=8 \Rightarrow \left[x^2-\frac{9}{x^2}=8\right].x^2$$

$$x^4-9=8x^2 \Rightarrow x^4-8x^2-9=0$$

$$(x^2-9)\,(x^2+1)=0 \quad \text{(تجربة)}$$

أما $x^2-9=0 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow \boxed{x=\mp 3} \rightarrow y=\frac{3}{\mp 3}=\mp 1$

$$C=\mp(3+i)$$

$$\boxed{C_1=3+i},\ \boxed{C_2=-3-i}$$

أو $x^2+=0 \qquad \notin R$

2 $7+24i$

$\sqrt{7+24i}=x+yi$ بالتربيع

$7+24i=(x^2-y^2)+2xyi$

$x^2-y^2=7 \quad ......(1)$

$[2xy=24]\div 2x \Rightarrow y=\frac{12}{x} \quad ....(2)$

تعويض في معادلة (1)

$x^2-y^2=7$

$x^2-\left(\frac{12}{x}\right)^2=7 \Rightarrow \left[x^2-\frac{144}{x^2}=7\right].x^2$

$x^4-144=7x^2 \Rightarrow x^4-7x^2-144=0$

$(x^2+9)(x^2-16)=0$

أما $x^2+9=0$ يُهمل $\notin R$

أو $x^2-16=0 \Rightarrow x^2=16$ بالجذر

$x=\mp 4$

تعويض

$y=\frac{12}{x}=\frac{12}{\mp 4}=\mp 3$

$C_1=\mp(4+3i)$

$C_1=4+3i \quad , \quad C_2=-4-3i$

توضيح

في حالة $(+)$ $C_1=+(4+3i)=4+3i$

في حالة $(-)$ $C_2=-(4+3i)=-4-3i$

3 $-i$

$\sqrt{0-i}=x+yi$ بالتربيع

$0-i=(x^2-y^2)+2xyi$

$x^2-y^2=0 \quad ......(1)$

$[2xy=-1]\div 2x \Rightarrow y=\frac{-1}{2x} \quad ......(2)$

$x^2-y^2=0$

$x^2-\left(\frac{-1}{2x}\right)^2=0 \Rightarrow \left[x^2-\frac{1}{4x^2}=0\right].4x^2$

$4x^4-1=0$ ((فرق بين مربعين))

$(2x^2+1)(2x^2-1)=0$

أما $2x^2+1=0$ يُهمل $\notin R$

أو $2x^2-1=0 \Rightarrow [2x^2=1]\div 2$

$x^2=\frac{1}{2}$ بالجذر $x=\mp\frac{1}{\sqrt{2}}$

$y=\frac{-1}{2x}=\frac{-1}{\sqrt{2}.\sqrt{2}\left(\mp\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$C=\mp\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$

اشارة الجزء التخيلي لعدد السؤال

$C_1=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i$

$C_2=\frac{-1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i$

4 $-6i$

$\sqrt{0-6i}=x+yi$ بالتربيع

$0-6i=(x^2-y^2)+2xyi$

$x^2-y^2=0 \quad ....(1)$

$[2xy=-6]\div 2x \Rightarrow y=\frac{-3}{x} \quad ....(2)$

تعويض

$x^2-y^2=0$

$x^2-\left(\frac{-3}{x}\right)^2=0 \Rightarrow \left[x^2-\frac{9}{x^2}=0\right].x^2$

$x^4-9=0$ ((فرق بين مربعين))

$(x^2-3)(x^2+3)=0$

أما $x^2-3=0 \Rightarrow x^2=3$ بالجذر

$x=\mp\sqrt{3}$

أو $x^2+3=0$ يُهمل $\notin R$

$y=\frac{-3}{x}=\frac{-3}{+\sqrt{3}}=\frac{-(\sqrt{3}.\sqrt{3})}{\mp\sqrt{3}}$

$y=\pm\sqrt{3}$

$\mp(\sqrt{3}-\sqrt{3}i)$

$C_1=\sqrt{3}-\sqrt{3}i$

$C_2=-\sqrt{3}+\sqrt{3}i$

5 $8i$

$\sqrt{0+8i}=x+yi$ بالتربيع

$0+8i=(x^2-y^2)+2xyi$

$x^2-y^2=0 \quad ....(1)$

$\left[\frac{2xy}{2x}=\frac{8}{2x}\right]\div 2x \Rightarrow y=\frac{4}{x} \quad ....(2)$

$x^2-y^2=0$

$x^2-\left(\frac{4}{x}\right)^2=0 \Rightarrow \left[x^2-\frac{16}{x^2}=0\right].x^2$

$x^4-16=0$ ((فرق بين مربعين))

$(x^2-4)(x^2+4)=0$

أما $x^2-4=0 \Rightarrow x^2=4$ بالجذر

$x=\pm 2$

أو $x^2+4=0$ يُهمل $\notin R$

$y=\frac{4}{x}=\frac{4}{+2}=\pm 2$

$C=\pm(2+2i)$

$C_1=2+2i$

$C_2=-2-2i$

6 $\frac{4}{1-\sqrt{3}i}$

$$\frac{4}{1-\sqrt{3}i}\cdot\frac{1+\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i}=\frac{4\left(1+\sqrt{3}i\right)}{(1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}$$

$$\frac{\cancel{4}\left(1+\sqrt{3}i\right)}{\cancel{4}}=1+\sqrt{3}i$$

$\sqrt{1+\sqrt{3}i}=x+yi$ بالتربيع

$$1+\sqrt{3}i=(x^2-y^2)+2xyi$$

$x^2-y^2=1$ ....(1)

$$\left[2xy=\sqrt{3}\right]\div 2x \Rightarrow y=\frac{\sqrt{3}}{2x}$$

تعويض

$$x^2-y^2=1$$

$$x^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2x}\right)^2=1$$

$$\left[x^2-\frac{3}{4x^2}=1\right].4x^2$$

$$4x^4-3=4x^2$$

$4x^4-4x^2-3=0$ (تجربة)

$$(2x^2+1)(2x^2-3)=0$$

$2x^2+1=0$ يُهمل $\notin R$

أو $2x^2-3=0 \Rightarrow \left[2x^2=3\right]\div 2$

$x^2=\frac{3}{2}$ بالجذر $x=\mp\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

$$y=\frac{\sqrt{3}}{2x}=\frac{\sqrt{3}}{2\left(\mp\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)}=\mp\frac{1}{\sqrt{2}}$$

توضيح

$$\frac{\cancel{\sqrt{3}}}{\sqrt{2}\,.\,\cancel{\sqrt{2}}\left(\frac{\cancel{\sqrt{3}}}{\cancel{\sqrt{2}}}\right)}$$

$$C=\mp\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$$

$$C_1=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i$$

$$C_2=\frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i$$

7 -25

$$x=\sqrt{-25}$$

$$x=\pm 5i$$

8 -17

$$x=\sqrt{17}\,.\sqrt{-1}$$

$$x=\pm\sqrt{17}i$$

أسئلة الوزارية حول موضوع الجذور التربيعية

سؤال 1 إذا كان $C+di=\frac{7-4i}{2+i}$ $c,d\in R$

1997 - د (1)

$$\sqrt{2c-di}$$

ملاحظة

عندما يعطي سؤال فيه علاقة تحتوي مجهول نقوم بتبسيط العلاقة ونجد منها المجهول .

$\therefore$ نجد قيم $c,d\in R$ من العلاقة أولاً .

$$c+di=\frac{7-4i}{2+i}\cdot\frac{2-i}{2-i}$$

$$c+di=\frac{14-7i-8i-4}{(2)^2+(1)^2}=\frac{10-15i}{5}$$

$$C+di=2-3i \qquad C=2$$

$$d=-3$$

$$\sqrt{2c-di}=\sqrt{2(2)-(-3)i}$$

$$\sqrt{4+3i}=x+yi$$ بالتربيع

$$4+3i=(x^2-y^2)+2xyi$$

$$x^2-y^2=4 \quad ....(1)$$

$$\left[\frac{2xy}{2x}=\frac{3}{2x}\right]\div 2x \Rightarrow y=\frac{3}{2x} \quad ....(2)$$

تعويض

$$x^2-y^2=4$$

$$x^2-\left(\frac{3}{2x}\right)^2=4$$

$$\left[x^2-\frac{9}{4x^2}=4\right].4x^2 \Rightarrow 4x^4-9=16x^2$$

$$4x^4-16x^2-9=0$$

$$(2x^2-9)(2x^2+1)=0$$

أما $2x^2-9=0 \Rightarrow [2x^2=9]\div 2$

$$x^2=\frac{9}{2} \overset{\text{بالجذر}}{\Rightarrow} x=\pm\frac{3}{\sqrt{2}}$$

أو $2x^2+1=0$ يُهمل $\notin R$

$$y=\frac{3}{2x}=\frac{3}{2.\left(\pm\frac{3}{\sqrt{2}}\right)}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$C=\pm\left(\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$$

«اشارة الجزء التخيلي»

$$C_1=\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i \ , \ C_2=-\frac{3}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i$$

توضيح لخطوة (y)

$$y=\frac{3}{2x}=\frac{3}{2.\left(\pm\frac{3}{\sqrt{2}}\right)}=\frac{3}{\sqrt{2}.\sqrt{2}\left(\pm\frac{3}{\sqrt{2}}\right)}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

سؤال 2 جد الجذرات التربيعيان للعدد المركب $\frac{14+2i}{1+i}$ 2004 - د (2)

ملاحظة يجب وضع العدد بصيغة (a+bi)

$$\frac{14+2i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}=\frac{14-14i+2i+2}{(1)^2+(1)^2}$$

$$\frac{16-12i}{2}=8-6i$$

$\sqrt{8-6i}=x+yi$ بالتربيع

$$8-6i=(x^2-y^2)+2xyi$$

$x^2-y^2=8$ ....(1) , $2xy=-6\div 2x$

$y=\frac{-3}{x}$ ....(2)

$$x^2-\left(\frac{-3}{x}\right)^2=8$$

$$\left[x^2-\frac{9}{x^2}=8\right].x^2 \Rightarrow x^4-9=8x^2$$

$$x^4-8x^2-9=0$$

$$(x^2-9)(x^2+1)=0$$

أما $x^2-9=0 \Rightarrow x^2=9$ بالجذر $x=\mp 3$

أو $x^2+1=0 \Rightarrow$ يُهمل $\notin R$

$$y=\frac{-3}{x}=\frac{-3}{\mp 3}=\pm 1$$

$$C=\mp(3-i)$$

$$C_1=3-i$$

$$C_2=-3+i$$

سؤال 3 جد الجذرات التربيعيان للعدد المركب $(-1+7i)(1+i)$ 2010 - د (2)

$$C_1=1+3i \quad , \quad C_2=-1-3i$$

النّور اشرق في الصّباح وبجّلك
والحسن يأتي خاضعاً كي يسألك
منْ اين تأتي بالجمال رفيقه
سبحان من خلق الجمال وجمّلك
يا من فتنت الحسن حتّى انّه
قد مال في شغفٍ اليك وقبّلك
ارفق بمفتون الفؤاد إذا اتى
واذا ظلمت اقولها ما اعدلك

تكوين المعادلة التربيعية إذا علم جذرها

عندما يطلب معادلة تربيعية ويعطي جذري المعادلة:

1. يجب وضع الجذرين بصورة a+bi
2. نجد مجموع الجذرين وحاصل ضرب الجذرين .
3. نطبق العلاقة التالية:

((صيغة قياسية)) $x^2 -$ (مجموع الجذرين) $x +$ (حاصل ضرب الجذرين) $= 0$

* عندما يقول في السؤال ان المعادلة ذات معاملات حقيقية هذا يعني ان الجذران مترافقان .

مثال 1 كوّن المعادلة التربيعية التي جذرها m،L حيث $m = 1 - i,\ L = 1 + 2i$

$m + L = (1 - i) + (1 + 2i)$

مجموع الجذرين $= 2 + i$

$m . L = (1 - i)(1 + 2i)$

ضرب الجذرين $= 1 + 2i - i + 2$

$= 3 + i$

$x^2 - (2 + i)x + (3 + i) = 0$

مثال 2 كوّن المعادلة التربيعية التي جذرها $\mp(2 + 2i)$

$m = 2 + 2i \quad , \quad L = -2 - 2i$

$m + L = (2 + 2i) + (-2 - 2i) = 0$

$m . L = (2 + 2i)(-2 - 2i)$

$= -4 - 4i - 4i + 4 = -8i$

$x^2 - (0)x + (-8i) = 0$

$x^2 - 8i = 0$

مثال 3 كوّن المعادلة التربيعية التي جذرها $m = \frac{3 - i}{1 + i}\ ,\ L = (3 - 2i)^2$

* يجب تبسيط الجذور أولاً

$m = \frac{3 - i}{1 + i} \cdot \frac{1 - i}{1 - i} = \frac{3 - 3i - i - 1}{(1)^2 + (1)^2}$

$m = \frac{2 - 4i}{2} \Rightarrow m = 1 - 2i$

$L = (3 - 2i)^2 = 9 - 12i - 4$

$L = 5 - 12i$

مجموع الجذرين $m + L = (1 - 2i) + (5 - 12i)$

$= 6 - 14i$

$m . L = (1 - 2i)(5 - 12i)$

$= 5 - 12i - 10i - 24 = -19 - 22i$

$x^2 - (6 - 14i)x + (-19 - 22i) = 0$

مثال 1 كوّن المعادلة التربيعية ذات المعاملات الحقيقية والتي احد جذورها (i).

((المعاملات حقيقية أي ان الجذران مترافقان)).

$$m = i \quad , \quad L = -i$$

$$m + L = (i) + (-i) = 0$$

$$m . L = (i)(-i) = -i^2 = 1$$

$$x^2 - (0)x + 1 = 0$$

$$x^2 + 1 = 0$$

مثال 2 كوّن المعادلة التربيعية ذات المعاملات الحقيقية والتي احد جذورها $(3-4i)$.

((مترافقان)) $m = 3 - 4i \quad , \quad L = 3 + 4i$

$$m + L = (3 - 4i) + (3 + 4i)$$

$$= 6$$

$$m . L = (3 - 4i)(3 + 4i)$$

$$= 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$$

$$x^2 - 6x + 25 = 0$$

مثال 3 كوّن المعادلة التربيعية ذات المعاملات الحقيقية والتي احد جذورها $(5-i)$.

$$m + L = (5 - i) + (5 + i)$$

$$= 10$$

$$m . L = (5 - i)(5 + i)$$

$$= (5)^2 + (1)^2 = 25 + 1 = 25$$

$$x^2 - 10x + 26 = 0$$

مثال 4 كوّن المعادلة التربيعية ذات المعاملات الحقيقية والتي احد جذورها $\frac{\sqrt{3} + 3i}{4}$.

$$\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}i \quad , \quad \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{4}i$$

$$m + L = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}i\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{4}i\right)$$

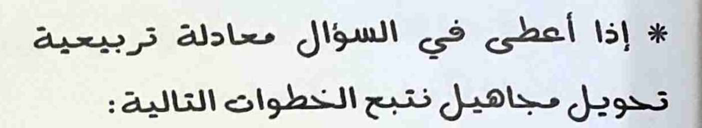
$$= \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$m . L = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}i\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{4}i\right)$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

$$= \frac{3}{16} + \frac{9}{16} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$$

$$x^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{3}{4} = 0$$



أسئلة مختلفة ذات صلة

* إذا أعطى في السؤال معادلة تربيعية تحويل مجاهيل نتبع الخطوات التالية :

أولاً: نضع المعادلة بالشكل القياسي حيث الطرف الايمن = 0 ثم نجعلها بالصيغة التالية :

x^2 − (مجموع الجذرين) x + (حاصل ضرب الجذرين) = 0

ثانياً: إذا وجد أكثر من حد فيه × نسحب الـ × عامل مشترك ويسحب باشارة سالب لأن الشكل القياسي فيه معامل × سالب

ثالثاً: نقسم على معامل x^2 دائماً لجعله =1

رابعاً: نحدد مجموع الجذرين وحاصل ضرب الجذرين .

خامساً: إذا كان في المعادلة مجهول واحد فقط نحاول البدء بالجزء المعلوم كلياً .
(حاصل الضرب أو حاصل الجمع)
كما في السؤال (2)

سؤال 1 إذا كان (2+4i) هو أحد جذري المعادلة $2x^2 - x - bx + c - 6 = 0$ معاملاتها حقيقية، جد $b, c \in R$

2015 - د (2)

الجذران مترافقان لان المعادلة ذات معاملات حقيقية

$m = 2+4i \ , \ L = 2-4i$

$2x^2 - x - bx + c - 6 = 0$

$[2x^2 - x(1+b) + (c-6) = 0] \div 2$ ← أنظر هنا

$x^2 - x\left(\frac{1+b}{2}\right) + \left(\frac{C-6}{2}\right) = 0$

($\frac{1+b}{2}$ مجموع الجذرين ، $\frac{C-6}{2}$ حاصل ضرب الجذرين)

$m + L = \frac{1+b}{2}$ نعوض الجذران m،L

$(2+\cancel{4i}) + (2-\cancel{4i}) = \frac{1+b}{2}$

$4 = \frac{1+b}{2} \Rightarrow 1+b = 8 \Rightarrow b = 7$

$m.L = \frac{c-6}{2}$ نعوض الجذران m،L

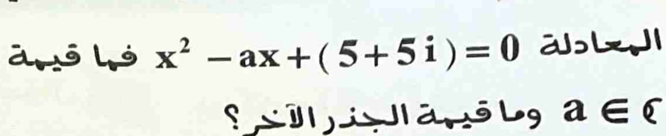
$(2+4i)(2-4i) = \frac{c-6}{2}$

$4+16 = \frac{c-6}{2} \Rightarrow \left[20 = \frac{c-6}{2}\right].2$

$40 = c-6 \Rightarrow c = 46$

سؤال 2

إذا كان $(3 + i)$ هو أحد جذري



المعادلة $x^2 - ax + (5+5i) = 0$ فما قيمة $a \in \mathbb{C}$ وما قيمة الجذر الآخر؟

2011 - د (1)

نبدأ بالجزء الكامل وهو حاصل ضرب الجذرين

$$m.L = 5+5i \Rightarrow (3+i)(L) = 5+5i$$

$$L = \frac{5+5i}{3+i} \cdot \frac{3-i}{3-i} = \frac{15-5i+15i+5}{9+1}$$

$$L = \frac{20+10i}{10} = \frac{20}{10} + \frac{10}{10}i$$

$$L = 2+i$$

الان نجد قيمة a وهي تمثل مجموع الجذرين

$$a = m+L$$

$$a = (3+i)+(2+i)$$

$$a = 5+2i$$

سؤال 3

إذا كان أحد جذري المعادلة $x^2 + K = 4x - 12ix$ هو ثلاث امثال الآخر جد الجذران وما قيمة K؟ إثرائي

$$x^2 + K = 4x - 12ix$$

$$x^2 - 4x + 12ix + K = 0$$

$$x^2 - x(4-12i) + K = 0$$

مجموع الجذرين

أحد الجذرين ثلاثة أمثال الاخر $m = 3L$

$$m+L = (4-12i)$$

$$3L + L = 4-12i$$

$$[4L = 4-12i] \div 4 \Rightarrow L = 1-3i$$

$$m = 3(1-3i)$$

$$m = 3-9i$$

لأن k يمثل حاصل ضرب الجذرين $K = m.L$

$$K = (3-9i)(1-3i)$$

$$K = 3-9i-9i-27$$

$$K = -24-18i$$

سؤال 4

إذا كان $(2 + i)$ يمثل أحد جذري المعادلة $x^2 - 4ix + a = 0$ جد الجذر الاخر . ثم جد قيمة a .

$$x^2 - 4ix + a = 0 \Rightarrow x^2 - (4i)x + a = 0$$

مجموع الجذرين

$$m+L = +4i$$

$$2+i+L = 4i \Rightarrow L = -2+4i-i$$

الجذر الأخر $L = -2+3i$

$a =$ حاصل ضرب الجذرين

$$a = m.L$$

$$a = (2+i)(-2+3i)$$

$$a = -4+6i-2i-3$$

$$a = -7+4i$$

حل المعادلة التربيعية في $\mathbb{C}$

* يتم حل المعادلة من الشكل $ax^2 + bx + c = 0$ باستخدام قانون الدستور.

حيث: $a =$ معامل x^2

$b =$ معامل x

$c =$ الحد المطلق ((بدون X))

$$x = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

مثال 1 جد مجموعة حل المعادلة الآتية في مجموعة الأعداد المركبة $x^2 + 4x + 5 = 0$

$a = 1$, $b = 4$, $c = 5$

$$x = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(4) \mp \sqrt{(4)^2 - 4(1)(5)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{-4 \mp \sqrt{16 - 20}}{2}$$

$$x = \frac{-4 \mp \sqrt{-4}}{2} = \frac{-4 \mp 2i}{2}$$

$\sqrt{4} . \sqrt{-1} = 2i$

إما $x = \frac{-4 + 2i}{2} \Rightarrow x = -2 + i$

أو $x = \frac{-4 - 2i}{2} \Rightarrow x = -2 - i$

مثال 2 جد مجموعة حل المعادلة:

$2Z^2 - 5Z + 13 = 0$

$a = 2$, $b = -5$, $c = 13$

$$Z = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$Z = \frac{-(-5) \mp \sqrt{(-5)^2 - 4(2)(13)}}{2(2)}$$

$$Z = \frac{5 \mp \sqrt{25 - 104}}{4}$$

$$Z = \frac{5 \mp \sqrt{-79}}{4} = \frac{5 \mp \sqrt{79}i}{4}$$

إما $Z = \frac{5 + \sqrt{79}i}{4}$

أو $Z = \frac{5 - \sqrt{79}i}{4}$



مثال 3 حل المعادلة في $\mathbb{C}$

$$Z^2 - 2Zi + 3 = 0$$

$a = 1$

$b = -2i$

$c = 3$

$$Z = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$Z = \frac{-(-2i) \mp \sqrt{(-2i)^2 - 4(1)(3)}}{2(1)}$$

$$Z = \frac{2i \mp \sqrt{4i^2 - 12}}{2}$$

$$Z = \frac{2i \mp \sqrt{-4-12}}{2} = \frac{2i \mp \sqrt{-16}}{2}$$

$\sqrt{16}\,.\sqrt{-1} = 4i$

$$Z = \frac{2i \mp 4i}{2}$$

أما $Z = \frac{2i+4i}{2} = \frac{6i}{2} = 3i$

أو $Z = \frac{2i-4i}{2} = \frac{-2i}{2} = -i$

ملاحظة إذا كان الجذر $\sqrt{b^2 - 4ac}$ فقط عدد سالب لا نستخدم الفرضية كما في مثال (1) و (2) و (3) حيث قمنا باستخراج الجذر التربيعي للعدد السالب كما تعلمنا في بداية الفصل.

أما إذا كان الجذر $\sqrt{b^2 - 4ac}$ يحوي (i) نأخذ الجذر ونجده بطريقة الفرضية كما في المثال (4) و (5).

مثال 4 جد مجموعة حل المعادلة:

$$Z^2 - 3Z + 3 + i = 0$$

$a = 1$

$b = -3$

$c = 3 + i$

$$Z = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$Z = \frac{-(-3) \mp \sqrt{(-3)^2 - 4(1)[3+i]}}{2(1)}$$

فرضية

$$Z = \frac{3 \mp \sqrt{9 - 12 - 4i}}{2} = \frac{3 \mp \sqrt{-3-4i}}{2}$$

$\sqrt{-3-4i} = x + yi$ بالتربيع

$$-3 - 4i = (x^2 - y^2) + 2xyi$$

$$x^2 - y^2 = -3 \quad ....(1)$$

$$[2xy = -4] \div 2x \Rightarrow y = \frac{-2}{x} \quad ....(2)$$

$$x^2 - y^2 = -3 \Rightarrow x^2 - \left(\frac{-2}{x}\right)^2 = -3$$

$$\left[x^2 - \frac{4}{x^2} = -3\right].x^2 \Rightarrow x^4 - 4 = -3x^2$$

$$x^4 + 3x^2 - 4 = 0$$

$$(x^2 + 4)(x^2 - 1) = 0$$

أما $x^2 + 4 = 0$ يُهمل $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \mp 1$

$$y = \frac{-2}{x} = \frac{-2}{\pm 1} = \pm 2 \Rightarrow \pm(1 - 2i)$$

$$Z = \frac{3 \mp (1-2i)}{2}$$

$Z = \frac{3+(1-2i)}{2} = 2 - i$

$Z = \frac{3-1+2i}{2} = 1 + i$

5 مثال جد مجموعة حل المعادلة :

$$Z^2+2Z+i(2-i)=0$$

$$Z^2+2Z+2i-i^2=0$$

$$Z^2+2Z+(1+2i)=0$$

$a=1$

$b=2$

$c=1+2i$

$$Z=\frac{-b\mp\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$Z=\frac{-(2)\mp\sqrt{(2)^2-4(1)[1+2i]}}{2(1)}$$

$$Z=\frac{-2\mp\sqrt{4-4-8i}}{2}$$

$$Z=\frac{-2\mp\sqrt{-8i}}{2}$$

2017 - د (2) /تطبيقي موصل

((نجد $\sqrt{-8i}$ كما تعلمنا سابقاً)) لوجود i داخل الجذر

$\sqrt{0-8i}=x+yi$ بالتربيع

$$0-8i=(x^2-y^2)+2xyi$$

$$x^2-y^2=0 \quad ....(1)$$

$$[2xy=-8]\div 2x \Rightarrow y=\frac{-4}{x} \quad ....(2)$$

$$x^2-y^2=0$$

$$x^2-\left(\frac{-4}{x}\right)^2=0 \Rightarrow \left[x^2-\frac{16}{x^2}=0\right].x^2$$

$$x^4-16=0$$

$$(x^2+4)(x^2-4)=0$$

أما $x^2+4=0$ يُهمل $\notin R$

أو $x^2-4=0 \Rightarrow x^2=4$ بالجذر

$$x=\mp 2$$

$$y=\frac{-4}{x}=\frac{-4}{\mp 2}=\pm 2$$

هنا تعوض

$$\sqrt{-8i}=\mp(2-2i)$$

$$Z=\frac{-2\mp(2-2i)}{2}$$

أما $Z=\frac{-2+2-2i}{2}=\frac{-2i}{2}=-i$

أو $Z=\frac{-2-2+2i}{2}=\frac{-4+2i}{2}=-2+i$

ملاحظة إذا أعطى المعادلة بطريقة مجموع مربعين نحلل كما تعلمنا طريقة تحليل مجموع مربعين.



مثال 6 حل المعادلة $4Z^2 + 25 = 0$

نضرب $(-i^2)$

$4Z^2 - 25i^2 = 0$

$(2Z - 5i)(2Z + 5i) = 0$

أما $2Z + 5i = 0 \Rightarrow [2Z = -5i] \div 2$

$Z = \frac{-5}{2} i$

أو $2Z \pm 5i = 0 \Rightarrow [2Z = 5i] \div 2$

$Z = \frac{5}{2} i$



مثال 7 حل المعادلة $Z^2 = -12$

بالجذر $Z^2 = -12$

$Z^2 = -12$

$Z = \sqrt{-12}$

$Z = \sqrt{12} . \sqrt{-1}$

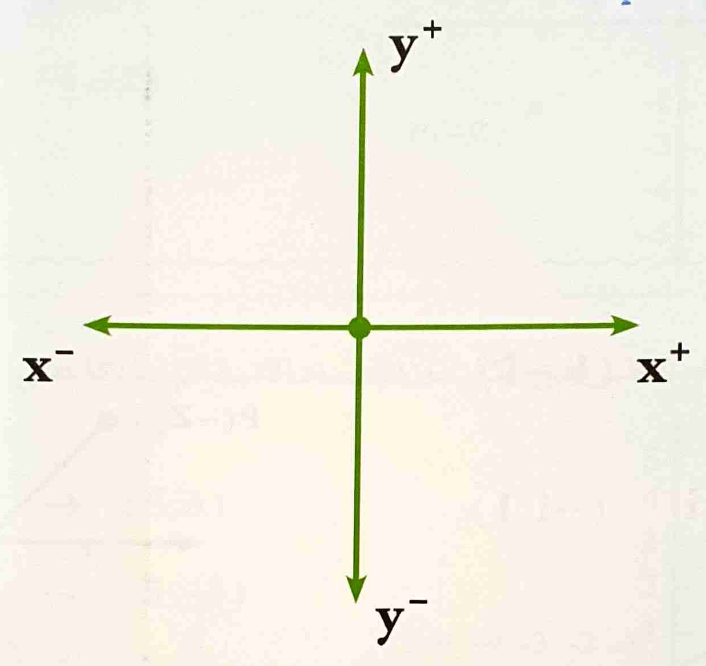
$Z = \sqrt{12} i \Rightarrow Z = \mp 2\sqrt{3} i$

الرياضيات

التمثيل الهندسي للأعداد المركبة

العدد المركب $a + bi$ يمكن كتابتهُ بشكل زوج مرتب $P(a, b)$

* مراجعة المستوي الاحداثي :

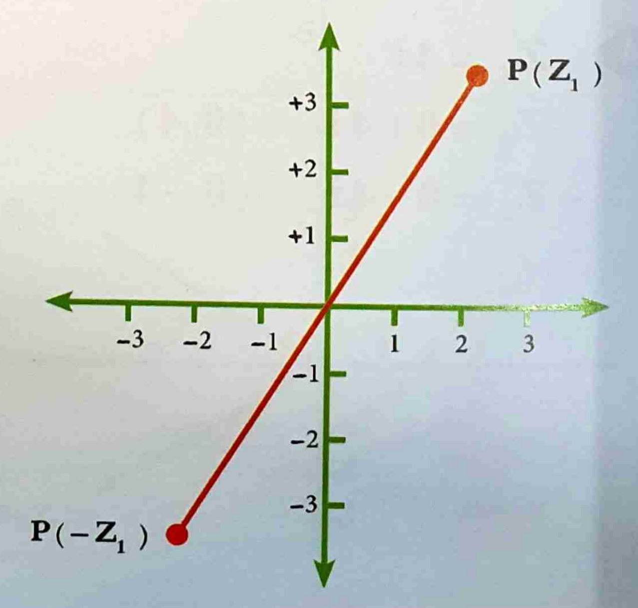


مثال 1

أكتب النظير الجمعي لكل من الاعداد التالية ثم مثّل هذه الاعداد ونظائرها الجمعية على شكل ارجاند :

1 $Z_1 = 2 + 3i \rightarrow (2, 3)$

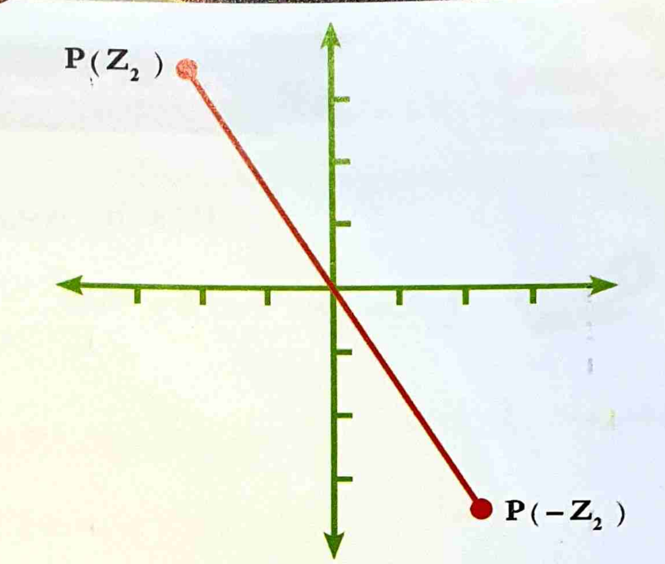
$-Z_1 = -2 - 3i \rightarrow (-2, -3)$



تذكّر النظير الجمعي نقلب اشارة الجزئين الحقيقي والتخيلي.

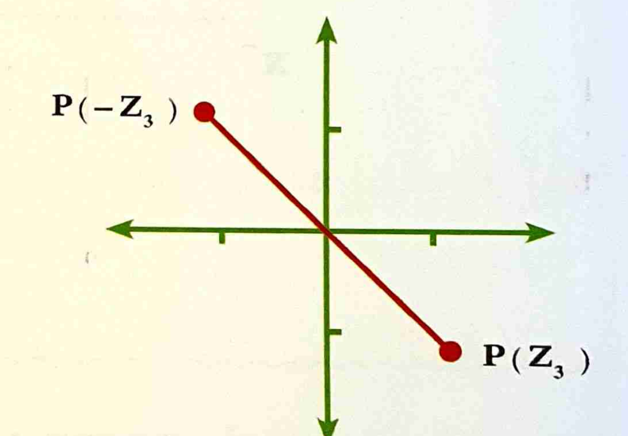
2 $Z_2 = -1+3i \rightarrow (-1,3)$

$-Z_2 = +1-3i \rightarrow (1,-3)$



3 $Z_3 = 1-i \quad (1,-1)$

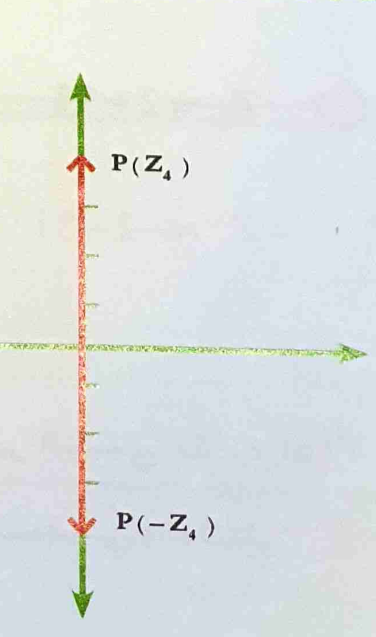
$-Z_3 = -1+i \quad (-1,1)$



4 $Z_4 = 4i$

$Z_4 = 0+4i \quad (0,4)$

$-Z_4 = 0-4i \quad (0,-4)$



مثال 2

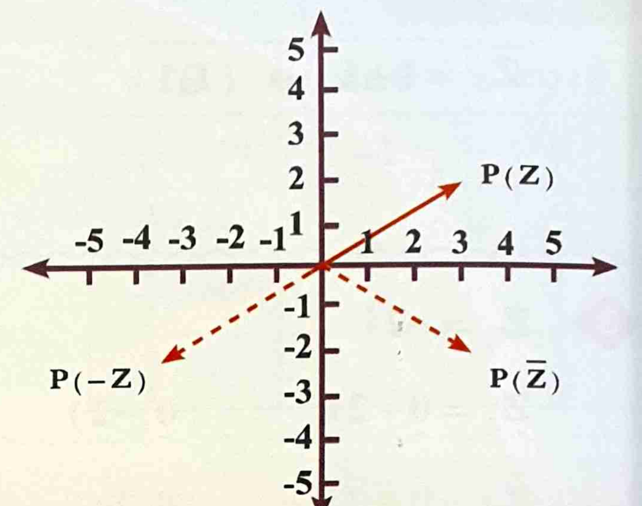
إذا كان $(Z = 4 + 2i)$ فوضح على شكل ارجاند كلاً من :

$Z \ , \ \bar{Z} \ , \ -Z$

$Z = 4 + 2i \rightarrow (4,2)$

$\bar{Z} = 4 - 2i \rightarrow (4,-2)$

$-Z = -4 - 2i \rightarrow (-4,-2)$



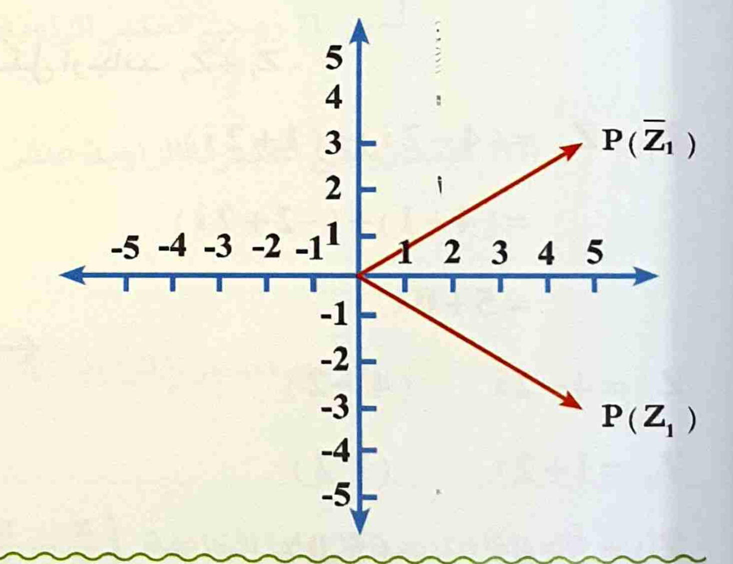
مثال 3

اكتب العدد المرافق لكل من الأعداد الآتية ثم مثّلها على شكل ارجاند :

1

$Z_1 = 5 + 3i \rightarrow (5,3)$

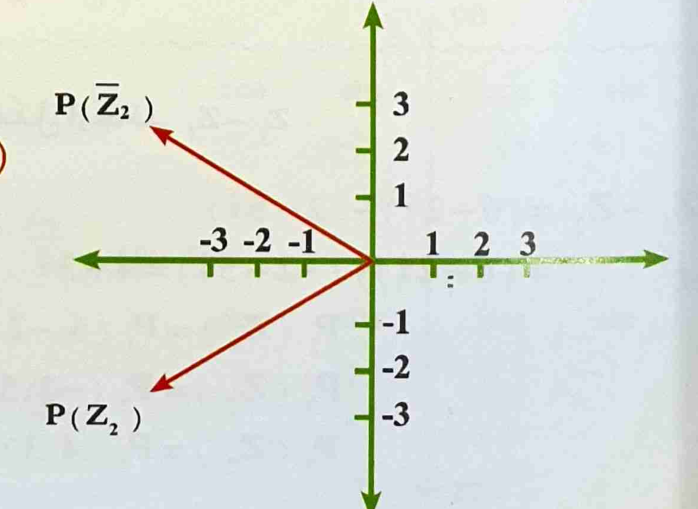
$\bar{Z}_1 = 5 - 3i \rightarrow (5,-3)$



2

$Z_2 = -3 + 2i \rightarrow (-3,2)$

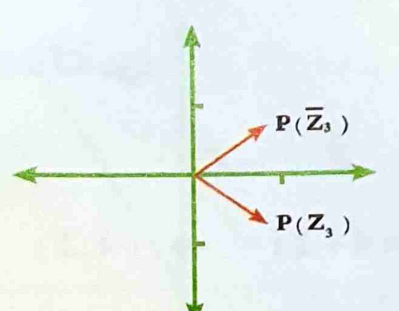
$\bar{Z}_2 = -3 - 2i \rightarrow (-3,-2)$





$Z_3 = 1 - i \rightarrow (1,-1)$

$\overline{Z}_3 = 1 + i \rightarrow (1,1)$

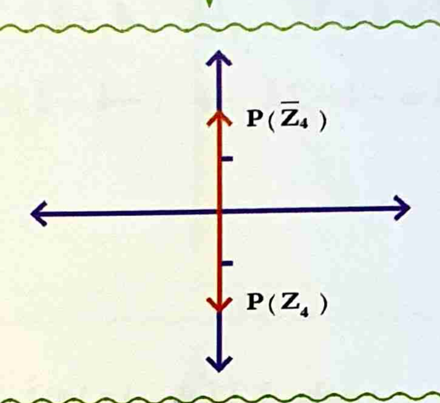


3

$Z_4 = -2i$

$Z_4 = 0 - 2i \qquad (0,-2)$

$\overline{Z}_4 = 0 + 2i \qquad (0,2)$





إذا كانت $Z_1 = 4 - 2i$ ، $Z_2 = 1 + 2i$ مثّل على شكل ارجاند $Z_1 + Z_2$.

$Z_1 + Z_2 = (4 - 2i) + (1 + 2i)$

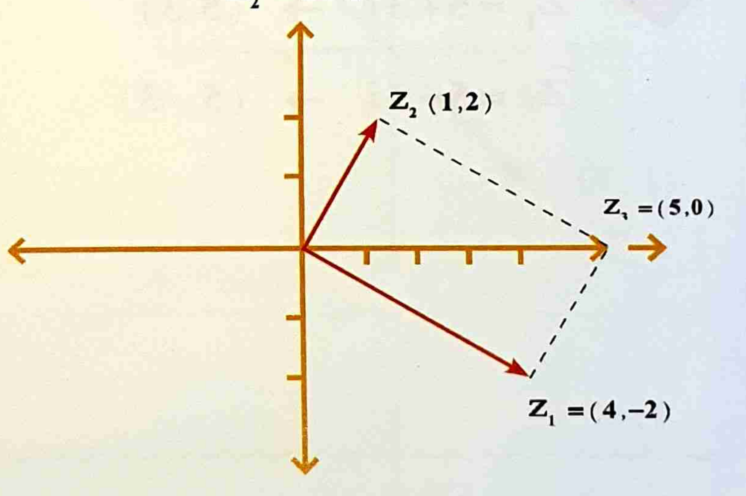
$= (4 + 1) + (-2 + 2i)$

$= 5 + 0i$

$Z_1 = 4 - 2i \qquad (4,-2)$

$Z_2 = 1 + 2i \qquad (1,2)$

$Z_3 = 5 + 0i \qquad (5,0)$





إذا كانت $Z_1 = 6 - 2i$ ، $Z_2 = 2 - 5i$ مثّل على شكل ارجاند $Z_1 - Z_2$.

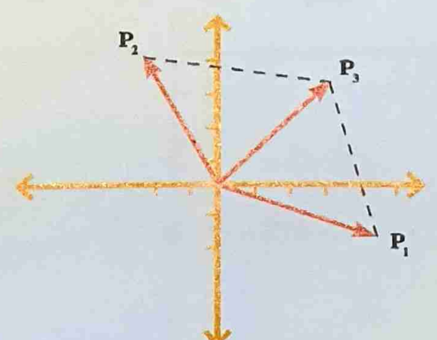
$Z_1 - Z_2 = (6 - 2i) - (2 - 5i)$

$= (6 - 2i) + (-2 + 5i) = 4 + 3i$

$P_1(Z_1) = P_1(6,-2)$

$P_2(Z_2) = P_2(-2,5)$

$P_3(Z_3) = P_3(4,3)$



مراجعة

θ	sinθ	cosθ
$\frac{3\pi}{2}=270^\circ$	-1	0
$\frac{\pi}{6}=30^\circ$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{3}=60^\circ$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{4}=45^\circ$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$

θ	sinθ	cosθ
0°	0	1
$2\pi=360^\circ$	0	1
$\frac{\pi}{2}=90^\circ$	1	0
$\pi=180^\circ$	0	-1

إيجاد قيم (sinθ – cosθ) لبعض الزوايا

أولاً: $n\pi$
- n فردي نعتبر الزاوية π
- n زوجي نعتبر الزاوية صفر

$\sin 20\pi=\sin 0=0$
$\cos 22\pi=\cos 0=1$
$\sin 10\pi=\sin 0=0$

((n عدد زوجي اعتبرنا الزاوية صفر))

$\cos 13\pi=\cos\pi=-1$
$\cos 15\pi=\cos\pi=-1$
$\sin 55\pi=\sin\pi=0$

((n فردي اعتبرنا الزاوية π))

ثانياً: الزوايا التابعة للزوايا الخاصة $\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)$:

مثلاً: $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{6}$ ... الخ .

1. نهمل العدد في البسط ونأخذ الزاوية الخاصة فقط $\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)$ ونجد $\frac{\sin}{\cos}$.
2. نضرب العدد × الزاوية ونحدد الربع ونضع الاشارات .

الربع	sin	cos
الأول (0 – 90)	+	+
الثاني (90 – 180)	+	−
الثالث (180 – 270)	−	−
الرابع (270 – 360)	−	+

مثال

جد : $\cos\frac{5\pi}{6}$

نهمل الـ (5) ونجد $\cos\frac{\pi}{6}$ وهو $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ من الجدول

الآن نضرب $30 \times 5 = 150$ وهي في الربع الثاني الـ cos سالب ← $\cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\downarrow$

$\frac{\pi}{6}$

مثال

جد : $\sin\frac{7\pi}{4}$

نهمل الـ (7) ونجد $\frac{\pi}{4}$ وهو $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ من الجدول .

الآن نضرب $315 = 45 \times 7$ وهي في الربع الرابع الـ (sin) سالب ← $\sin\frac{7\pi}{4} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

$\downarrow$

$\left(\frac{\pi}{4}\right)$

ثالثاً: إذا كان البسط أكبر من ضعف المقام نقسّم البسط على المقام ويجب ان يكون الناتج زوجي وسوف اوضح الطريقة في المثال .

1 $\cos\frac{49\pi}{4}$

$49 \div 4$: الناتج 12 ← ناتج زوجي (o.k)، 4، 09، 8، الباقي 1

نضع الباقي في البسط

$\cos\frac{1\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

2 $\sin\frac{37\pi}{6}$

$73 \div 6$: الناتج 6 ← زوجي o.k، 36، الباقي 1

$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

3 $\sin\frac{47\pi}{4}$

$47 \div 4$: الناتج 11، 4، 07، 4، الباقي 3

لأن الناتج فردي نعيد القسمة ونجعل الناتج زوجي (دائماً)

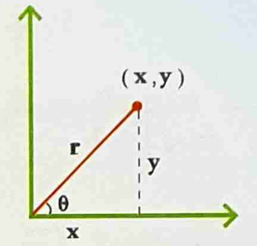
$47 \div 4$: الناتج 10، 4، الباقي 7

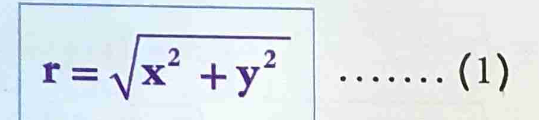
$\sin\frac{47\pi}{4}$

$\sin\frac{7\pi}{4} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ (نفس الطريقة أعلاه)

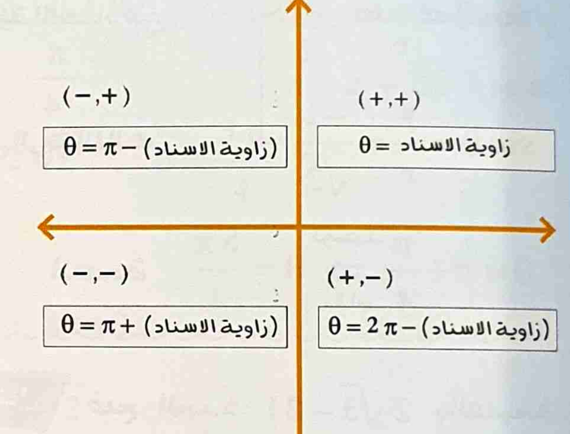
المقياس والقيمة الاساسية لسعة العدد المركب ـ الصيغة القطبية

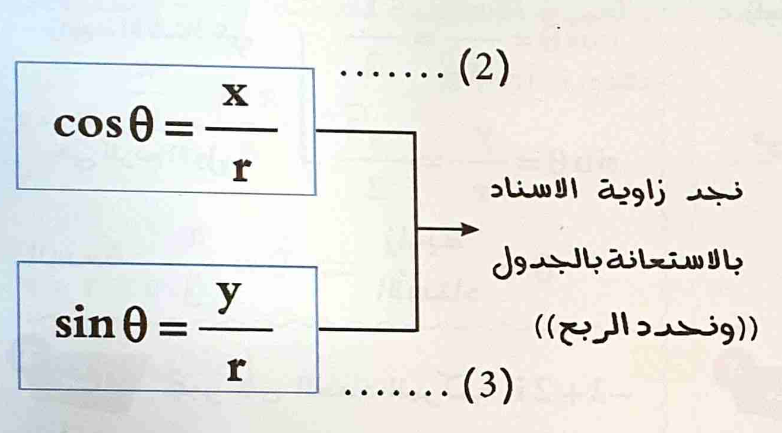
أولاً: إذا طلب المقياس والسعة للعدد المركب $Z = x + yi \Rightarrow Z = (x, y)$





$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \ldots\ldots\ (1)$$





$$\cos\theta = \frac{x}{r} \quad \ldots\ldots\ (2)$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} \quad \ldots\ldots\ (3)$$

نجد زاوية الاسناد بالاستعانة بالجدول ((ونحدد الربع))

يرمز للمقياس بالرمز r أو $\|Z\|$ ويُقرأ $Mod(Z)$ ، ويرمز للسعة بالرمز θ وتكتب $org(Z)$ أو θ

ثانياً: الصيغة القطبية: هناك صيغة أخرى للعدد المركب وهي الصيغة القطبية والتي تكتب بالشكل:

$$Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

* لاستخراج الصيغة القطبية يجب علينا ايجاد كل من السعة $= \theta$, المقياس $= r$ وذلك حسب الملاحظات المذكورة اعلاه

* يجب وضع العدد المركب بصيغة $a + bi$ أي الصيغة العددية للعدد المركب ثم نبدأ بتطبيق القوانين اعلاه (1) و (2) و (3).

مثال 1 إذا كان $Z=1+\sqrt{3}i$ فجد المقياس والقيمة الاساسية لسعة Z .

الربع الأول $Z=1+\sqrt{3}i \rightarrow Z=(\overset{+}{\underset{x}{1}},\overset{+}{\underset{y}{\sqrt{3}}})$

2006 - د (2)

$r=\sqrt{x^2+y^2}$

$r=\sqrt{(1)^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}$

$r=2$ (المقياس)

$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{1}{2}$

$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

زاوية الأسناد هي $\frac{\pi}{3}$ في الربع الأول

السعة $\theta=\frac{\pi}{3} \Leftarrow \theta=$ زاوية الأسناد

مثال 2 إذا كان $Z=-1-i$ فجد المقياس والقيمة الاساسية لسعة Z .

الربع الثالث $Z=-1-i \rightarrow Z=(\underset{x}{-1},\underset{y}{-1})$

$r=\sqrt{x^2+y^2}$

$r=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{1+1}$

$r=\sqrt{2}$ (المقياس)

$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{-1}{\sqrt{2}}$

$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{-1}{\sqrt{2}}$

زاوية الأسناد هي $\frac{\pi}{4}$ في الربع الثالث

السعة $\theta=\pi+\frac{\pi}{4} \xrightarrow[\text{مقام}]{\text{توحيد}} \theta=\frac{5\pi}{4}$

مثال 3 عَبر عن العدد المركب $-2+2i$ بالصيغة القطبية .

2013 - د (1)

((الربع الثاني)) $-2+2i \rightarrow (\overset{-}{-2},\overset{+}{2})$ (x, y)

$r=\sqrt{x^2+y^2}$

(المقياس) $r=\sqrt{(-2)^2+(2)^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8} \Rightarrow r=2\sqrt{2}$

$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{-\not{2}}{\not{2}\sqrt{2}}=\frac{-1}{\sqrt{2}}$

$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{\not{2}}{\not{2}\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

زاوية الأسناد $\frac{\pi}{4}$ الربع الثاني

$\theta=\pi-\frac{\pi}{4} \xrightarrow[\text{مقام}]{\text{توحيد}} \theta=\frac{3\pi}{4}$

$Z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

$Z=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

مثال 4 ضع العدد $2\sqrt{3}-2i$ بالصيغة القطبية .

2012 - د (2)   2014 - نازحين   2013 - د (1) خارج القطر

((الربع الرابع)) $2\sqrt{3}-2i \rightarrow (\overset{+}{2\sqrt{3}},\overset{-}{-2})$ (x, y)

$r=\sqrt{x^2+y^2}$

$r=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+(-2)^2}=\sqrt{12+4}=\sqrt{16} \Rightarrow r=4$

$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{\overset{1}{\not{2}}\sqrt{3}}{\underset{2}{\not{4}}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{-2}{4}=\frac{-1}{2}$

زاوية الأسناد $\frac{\pi}{6}$ ربع رابع

$\theta=2\pi-\frac{\pi}{6} \xrightarrow[\text{مقام}]{\text{توحيد}} \theta=\frac{11\pi}{6}$

$Z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

$Z=4\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$

ثالثاً: إذا أعطى المقياس والقيمة الأساسية للسعة ويطلب العدد المركب :

* إذا لم يعطي زاوية مباشرة فراجع طريقة أيجاد قيم $\sin\theta \quad \cos\theta$

$x = r \cos\theta$

$y = r \sin\theta$

حيث $Z = x + yi$

$Z =$ الجزء الحقيقي + الجزء التخيلي (i)

مثال 1 عدد مركب مقياسه $(2\sqrt{2})$ والقيمة الأساسية للسعة $\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ جد العدد بصورة $a + bi$

$r = 2\sqrt{2} \quad , \quad \theta = \frac{3\pi}{4}$

$x = r \cos\theta$

$x = 2\sqrt{2} \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

$x = 2\sqrt{2} \cdot \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow x = -2$ الجزء الحقيقي

$y = r \sin\theta$

$y = 2\sqrt{2} \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

$y = 2\sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow y = 2$ الجزء التخيلي

$Z = x + yi \Rightarrow Z =$ الجزء الحقيقي + الجزء التخيلي (i)

$Z = -2 + 2i$

مثال 2 إذا كان مقياس عدد مركب = 4 والقيمة الاساسية لسعته $\left(\frac{11\pi}{6}\right)$ جد العدد بصورة $a + bi$

$r = 4 \quad , \quad \theta = \frac{11\pi}{6}$

$x = r \cos\theta$

$x = 4\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right)$

$x = \overset{2}{\cancel{4}} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{\underset{1}{\cancel{2}}}\right) \Rightarrow x = 2\sqrt{3}$ الجزء الحقيقي

$y = r \sin\theta$

$y = 4\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)$

$y = \overset{2}{\cancel{4}}\left(\frac{-1}{\underset{1}{\cancel{2}}}\right) \Rightarrow y = -2$ الجزء التخيلي

$Z = x + yi \Rightarrow Z =$ الجزء الحقيقي + الجزء التخيلي (i)

$Z = 2\sqrt{3} - 2i$

فكرة إثرائية: يمكن ربط هذه الحالة مع موضوع تكوين المعادلة التربيعية وكما في المثال التالي :

مثال كوّن المعادلة التربيعية ذات المعاملات الحقيقية والتي أحد جذورها مقياسه (2) وسعته الاساسية $\left(\frac{5\pi}{3}\right)$

ملاحظة يجب أن نجد العدد المركب وهو أحد جذور المعادلة أما الجذر الأخر فهو مرافقة لأن المعادلة ذات معاملات حقيقية.

$$x = r\cos\theta$$

$$x = 2\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)$$

$$x = 2\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow x = 1$$

$$y = r\sin\theta$$

$$y = 2\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)$$

$$y = 2\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow y = -\sqrt{3}$$

$$Z = x + yi \Rightarrow Z_1 = 1 - \sqrt{3}i$$

الجذر الأخر $Z_2 = 1 + \sqrt{3}i$

مجموع الجذرين $= \left(1 - \sqrt{3}i\right) + \left(1 + \sqrt{3}i\right)$

$$= 2$$

حاصل ضرب الجذرين $= \left(1 - \sqrt{3}i\right)\left(1 + \sqrt{3}i\right)$

$$= (1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2$$

$$= 1 + 3 = 4$$

$$x^2 - 2x + 4 = 0$$

مثال إضافي إذا علمت ان $Z = -1 + hi$ عدد مركب القيمة الاساسية لسعته $\frac{3\pi}{4}$ جد قيمة (h).

$$Z = -1 + hi \Rightarrow (-1, h) \Rightarrow x = -1,\ y = h$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r}$$

$$\cos\frac{3\pi}{4} = \frac{-1}{r}$$

$$\frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-1}{r} \Rightarrow r = \sqrt{2}$$

$$y = r\ \sin\theta$$

$$y = \sqrt{2}\ .\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$y = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow y = 1\ ,\ h = 1$$

مبرهنة ديموافر

أولاً: إذا كان لدينا $(a+bi)^n$ حيث n عدد صحيح (ليس كسراً).

$$Z^n = r^n\left[\cos\theta + i\sin\theta\right]^n \Rightarrow Z^n = r^n\left[\cos(\theta . n) + i\sin(\theta . n)\right]$$

ملاحظة

إذا كان n عدد صحيح سالب تصبح العلاقة:

$$\cos(-\theta) = \cos\theta$$
$$\sin(-\theta) = -\sin\theta$$

$$Z^{-n} = r^{-n}\left[\cos(\theta . n) - i\sin(\theta . n)\right]$$

أي أن السالب الذي مع الزاوية يُهمل مع دالة الـ cos ويتم وضعه قبل دالة الـ sin

ملاحظة

لحل سؤال ديموافر وكان الاس عدد صحيح يجب توفير ثلاث اركان وهي r المقياس ، θ السعة ، n وهو اس القوس

وقد تعلمت سابقاً كيف تجد r و θ . ثم تطبق قانون مبرهنة ديموافر أعلاه.

الرياضيات

الجزء الأول: يعطي صيغة قطبية جاهزة ما عليك سوى ضرب (الأس × الزاوية) كما في الأمثلة التالية:



أحسب:

1 $\left[\cos\frac{3\pi}{8}+i\sin\frac{3\pi}{8}\right]^4$

$=\cos\left(\frac{3\pi}{8}.4\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{8}.4\right)$

$=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}$

$=0+i(-1)=0-i$

2 $\left[\cos\frac{5}{24}\pi+i\sin\frac{5}{24}\pi\right]^4$ 2012 - تمهيدي

$=\cos\left(\frac{5\pi}{24}.4\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{24}.4\right)$

$=\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}$

$=\frac{-\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

3 $\left[\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right]^{-3}$ 2015 - د (1) خارج / 2017 - د (1) خارج/أحيائي

$=\cos\left(\frac{7\pi}{12}.(-3)\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{12}.(-3)\right)$

$=\cos\left(\frac{-7\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{-7\pi}{4}\right)$ (يهمل)

إنتبه ! السالب يهمل مع cos ويتم وضع السالب قبل الـ sin

$=\cos\frac{7\pi}{4}-i\sin\frac{7\pi}{4}$

اشارة الربع الرابع

$=\frac{1}{\sqrt{2}}-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i$

الأشارة الاصلية

مثال 2

بسّط ما يلي:

1 $\frac{(\cos2\theta+i\sin2\theta)^5}{(\cos3\theta+i\sin3\theta)^3}$

$\frac{(\cos\theta+i\sin\theta)^{10}}{(\cos\theta+i\sin\theta)^9}=(\cos\theta+i\sin\theta)$

1- لايمكن ان نستخدم قانون عند القسمة تطرح الاسس لأن الاقواس مختلفة، لذلك سوف نضرب العدد الذي بجانب θ (معامل θ) بأس القوس ((عكس العملية السابقة بالضبط)).

2- لا تأتي هذه المعاملات مختلفة

$\frac{(\cos2\theta+i\sin2\theta)^5}{(\cos3\theta+i\sin3\theta)^3}$

2 $(\cos\theta+i\sin\theta)^8(\cos\theta-i\sin\theta)^4$

$=(\cos\theta+i\sin\theta)^8(\cos\theta+i\sin\theta)^{-4}$

$=(\cos\theta+i\sin\theta)^4=\cos4\theta+i\sin4\theta$

2015 - د (1) خارج

"توضيح"

$\cos\theta-i\sin\theta=(\cos\theta+i\sin\theta)^{-1}$

* بمعنى ان الصيغة القطبية اعلاه إذا كانت تحمل اشارة سالبة تقلب الى اشارة موجبة ونعكس اشارة الاس

الجزء الثاني: إذا اعطى عدد مركب مرفوع الى اس صحيح (الأس سالب أو موجب) فيجب علينا ان نتبع الخطوات التالية :

1. تبسيط العدد المركب الموجود داخل القوس وجعله بالصيغة العادية للعدد المركب (الاسئلة الثلاث الموجودة في المنهج والتي سوف نتطرق اليها لاتحتاج تبسيط لان داخل القوس عدد مركب بالصيغة العادية) .
2. نقوم بايجاد المقياس والسعة كما تعلمنا سابقاً .
3. بعد توفير الاركان الثلاث نطبق قانون مبرهنة ديموافر .

$$Z^n = r^n\left[\cos\theta + i\sin\theta\right]^n \Rightarrow Z^n = r^n\left[\cos(\theta.n) + i\sin(\theta.n)\right]$$

مثال 1 أحسب باستخدام ديموافر $(1+i)^{11}$

$1+i \rightarrow (1,1)$ ، x,y ((الربع الأول))

الركن الأول (r)

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$r = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} \Rightarrow r = \sqrt{2}$

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

زاوية الأسناد $\frac{\pi}{4}$ الربع الأول

الركن الثاني $\theta = \frac{\pi}{4}$

الركن الثالث $n=11$

قانون ديموافر

$Z^n = r^n\,(\cos\theta + i\sin\theta)^n$

التعويض بالاركان الثلاث

$Z^{11} = \left(\sqrt{2}\right)^{11}\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right]^{11}$

ضرب الاس في الزاوية (كما في الجزء الاول من الموضوع)

$Z^{11} = 32\sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{4} + i\sin\frac{11\pi}{4}\right)$

تبسيط الزاوية

$= 32\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

الناتج

$= 32\sqrt{2}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -32 + 32i$

(2) . 2015

2019 - تمهيدي/تطبيقي

مثال 2 أحسب باستخدام ديموفر $(1-i)^7$

الربع الرابع $1-i \rightarrow (1,-1)$ ، x = 1 (+) ، y = −1 (−)

الركن الأول (r) $r=\sqrt{x^2+y^2}$

$r=\sqrt{(1)^2+(-1)^2} \rightarrow r=\sqrt{2}$

$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

زاوية الأسناد $\frac{\pi}{4}$

$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{-1}{\sqrt{2}}$

الربع الرابع

الركن الثالث n=7 ، $\theta=2\pi-\frac{\pi}{4} \Rightarrow \theta=\frac{7\pi}{4}$

قانون ديموفر

$Z^n=r^n(\cos\theta+i\sin\theta)^n$

تعويض

$Z^7=(\sqrt{2})^7\left[\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right]^7$

الاس × الزاوية

$Z^7=8\sqrt{2}\left(\cos\frac{49\pi}{4}+i\sin\frac{49\pi}{4}\right)$

تبسيط الزاوية

$=8\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

الناتج

$=8\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=8+8i$

2012 - د (1) | 2015 - د (1) خارج | 2013 - تمهيدي | 2017 - د (2) تطبيقي

مثال 3 أحسب باستخدام ديموفر $(\sqrt{3}+i)^{-9}$

2014 - د (2)

الربع الأول $\sqrt{3}+i \rightarrow (\sqrt{3},1)$ (+ , +)

$r=\sqrt{x^2+y^2}$

$r=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(1)^2}=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}$

$r=2$

$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{1}{2}$

زاوية الأسناد $\frac{\pi}{6}$ الربع الأول $\theta=\frac{\pi}{6}$

$Z^n=r^n(\cos\theta+i\sin\theta)^n$

$Z^{-9}=(2)^{-9}\left[\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right]^{-9}$

يُهمل ، يخرج قبل sin

$=\frac{1}{2^9}\left[\cos\frac{-9\pi}{6}+i\sin\frac{-9\pi}{6}\right]$

$=\frac{1}{512}\left(\cos\frac{3\pi}{2}-i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$

تذكر $\frac{3\pi}{2}=270^\circ$

$=\frac{1}{512}(0-(-1)i)$

$=0+\frac{1}{512}i$

نتيجة مبرهنة ديموافر

عندما يكون اس القوس كسر وبشكل $(\frac{1}{n})$ أي ان الكسر بسطهُ = 1 يكون السؤال نتيجة ديموافر .

$$Z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\theta + i\sin\theta\right]^{\frac{1}{n}} \Rightarrow Z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right]$$

* ولحل سؤال النتيجة توفير أربع اركان وهي :

$r =$ المقياس , $\theta =$ السعة , $n =$ مقام الاس , $k = 0,1,2,\dots,n-1$

ملاحظة عندما يطلب (الجذور التربيعية - التكعيبية - الجذور الاربعة . . .الخ) لعدد مركب غير مرفوع الى اس يعني نتيجة والاس كسر ولا يعطي قوس في هذه الحالة انت عليك التمييز :

جذور تربيعية $\overset{\text{معناها}}{\Rightarrow} (a+bi)^{\frac{1}{2}} \rightarrow n = 2, \quad k = 0,1$

جذور تكعيبية $\overset{\text{معناها}}{\Rightarrow} (a+bi)^{\frac{1}{3}} \rightarrow n = 3, \quad k = 0,1,2$

جذور الأربعة $\overset{\text{معناها}}{\Rightarrow} (a+bi)^{\frac{1}{4}} \rightarrow n = 4, \quad k = 0,1,2,3$

k نقف قبل الـ n برقم كما تلاحظ الامثلة التوضيحية

* إذا كان العدد المركب مرفوع الى اس كسر ولكن (البسط $\neq 1$) للأس فيكون السؤال (مبرهنة ونتيجة) .

مثلاً $(a+bi)^{\frac{3}{2}} = \left[(a+bi)^3\right]^{\frac{1}{2}}$
- $(a+bi)^3$
- $(\text{ناتج المبرهنة})^{\frac{1}{2}}$

مثلاً $(a+bi)^{\frac{-5}{2}} = \left[(a+bi)^{-5}\right]^{\frac{1}{2}}$
- $(a+bi)^{-5}$
- نتيجة ديموافر $(\text{الناتج})^{\frac{1}{2}}$

مثلاً $(a+bi)^{\frac{2}{-3}} = \left[(a+bi)^{-2}\right]^{\frac{1}{3}}$
- مبرهنة $(a+bi)^{-2}$
- نتيجة $(\text{الناتج})^{\frac{1}{3}}$

إنتبه ! ضع اشارة السالب مع القوس الداخلي (مع المبرهنة) مهما كان موقع السالب في الأس.

* عند قراءة الملاحظة الاخيرة انظر الى سؤال 2017 دور أول فيه شرح مفصل لهذه الحالة (سؤال 20) في الاسئلة الوزارية .

مثال 1

جد الجذور التربيعية للعدد المركب $-1+\sqrt{3}i$ باستخدام نتيجة مبرهنة ديموافر.

$$-1+\sqrt{3}i \Rightarrow (\underset{-}{-1},\underset{+}{\sqrt{3}}) \quad (x,y)$$ الربع الثاني

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(-1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}$$

$$r=\sqrt{1+3}=\sqrt{4} \Rightarrow r=2$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{-1}{2}$$

$$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

زاوية الأسناد $\frac{\pi}{3}$ الربع الثاني

$$\theta=\pi-\frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta=\frac{2\pi}{3}$$

الاركان الاربعة

$$r=2,\ \theta=\frac{2\pi}{3},\ n=2,\ k=0\ ,\ 1$$

$$Z^{\frac{1}{n}}=r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\theta+i\sin\theta\right]^{\frac{1}{n}}$$

$$Z^{\frac{1}{n}}=r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right]$$

$$k=0,\ \frac{\theta+2k\pi}{n}=\frac{\frac{2\pi}{3}+0}{2}=\frac{2\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$$

$$Z_1=2^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$Z_1=\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}i$$

$$k=1,\ \frac{\theta+2k\pi}{n}=\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi}{2}=\frac{\frac{2\pi+6\pi}{3}}{2}=\frac{4\pi}{3}$$

$$Z_2=\sqrt{2}\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$$

$$Z_2=\sqrt{2}\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\frac{-1}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}i$$

2017 - د (1) تطبيقي/موصل | 2017 - د (3) أحيائي

صيغة اخرى للسؤال

حل المعادلة $x^2+1-\sqrt{3}\ i=0$ باستخدام نتيجة مبرهنة ديموفر

$$x^2+1-\sqrt{3}\ i=0$$ ننقل المعاليم في طرف والمجاهيل في طرف

$$x^2=-1+\sqrt{3}\ i$$ بالجذر التربيعي

$$x=\sqrt{-1+\sqrt{3}\ i}=(-1+\sqrt{3}\ i)^{\frac{1}{2}}$$

ثم نكمل الحل كما في السابق

* إذا كانت قيمة زاوية الاسناد المستخرجة من الجدول هي $\left(\pi, 2\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ لانطبق القوانين الاربعة لان هذه الزوايا تقع على الحدود بين الارباع لذلك تكون هي θ وزاوية الاسناد بنفس الوقت. في الامثلة التالية سوف تصادفنا هذه الزوايا.

مثال 2 جد الجذور التكعيبية للعدد المركب $27i$ باستخدام نتيجة مبرهنة ديموافر.

$$0+27i \Rightarrow (0,27)$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(0)^2+(27)^2}=\sqrt{27^2}$$

$$r=27$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{0}{27}=0$$

$$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{27}{27}=1$$

هنا لا نطبق قانون الأرباع لأن الزاوية $\frac{\pi}{2}$ لا تنتمي الى ربع وتقع على الحدود بين الربعين الأول والثاني.

$$\theta=\frac{\pi}{2}$$

$$Z^{\frac{1}{n}}=r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right]$$

عندما $k=0,\ \frac{\theta+2k\pi}{n}=\frac{\frac{\pi}{2}+0}{3}=\frac{\pi}{6}$

$$Z_1=27^{\frac{1}{3}}\left[\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right]$$

$$Z_1=3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$$

عندما $k=1,\ \frac{\theta+2k\pi}{n}=\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3}=\frac{\frac{\pi+4\pi}{2}}{3}=\frac{5\pi}{6}$

$$Z_2=3\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$$

$$Z_2=3\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=\frac{-3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$$

عندما $k=2,\ \frac{\theta+2k\pi}{n}=\frac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{3}=\frac{\frac{\pi+8\pi}{2}}{3}=\frac{9\pi}{6}=\frac{3\pi}{2}$

$$Z_3=3\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$Z_3=3(0-i)=-3i$$

2019 - د (1) تطبيقي/خارج



مثال 3 جد الجذور الاربعة للعدد (-16).

$$-16+0i \Rightarrow \underset{(-16,0)}{(x,y)}$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(-16)^2+(0)^2}=\sqrt{256}$$

$$r=16$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{-16}{16}=-1$$

$$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{0}{16}=0$$

لا نطبق قانون الأرباع لأن π تقع على الحدود بين الربعين الثاني والثالث.

$$\theta=\pi$$

$$Z^{\frac{1}{n}}=r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\frac{\theta+2k\pi}{n}\right]$$

$k=0,\ \frac{\theta+2k\pi}{n}=\frac{\pi+0}{4}=\frac{\pi}{4}$

$$Z_1=(16)^{\frac{1}{4}}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$Z_1=2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)\Rightarrow Z_1=\sqrt{2}+\sqrt{2}i$$

عندما $k=1,\ \frac{\theta+2k\pi}{n}=\frac{\pi+2\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$

$$Z_2=2\left(\cos\frac{3\pi}{4}+\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$Z_2=2\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)\Rightarrow Z_2=-\sqrt{2}+\sqrt{2}i$$

عندما $k=2,\ \frac{\theta+2k\pi}{n}=\frac{\pi+4\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}$

$$Z_3=2\left(\cos\frac{5\pi}{4}+\sin\frac{5\pi}{4}\right)$$

$$Z_3=2\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)\Rightarrow Z_3=-\sqrt{2}-\sqrt{2}i$$

عندما $k=3,\ \frac{\theta+2k\pi}{n}=\frac{\pi+6\pi}{4}=\frac{7\pi}{4}$

$$Z_4=2\left(\cos\frac{7\pi}{4}+\sin\frac{7\pi}{4}\right)$$

$$Z_4=2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)\Rightarrow Z_4=\sqrt{2}-\sqrt{2}i$$

مثال 4 أوجد قيم $(-64i)^{\frac{1}{6}}$ باستخدام مبرهنة ديموافر .

$$0-64i \Rightarrow \overset{(x,y)}{(0,-64)}$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$r=\sqrt{0+(-64)^2} \Rightarrow r=64$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{0}{64}=0 \quad \theta=\frac{3\pi}{2}$$

$$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{-64}{64}=-1$$

عندما

$$Z^{\frac{1}{n}}=r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right]$$

عندما $k=0,\ \frac{\theta+2k\pi}{n}=\frac{\frac{3\pi}{2}+0}{6}=\frac{3\pi}{12}=\frac{\pi}{4}$

$$Z_1=(64)^{\frac{1}{6}}\left[\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right]$$

$$Z_1=2\left(\frac{1}{\sqrt2}+\frac{1}{\sqrt2}i\right) \Rightarrow Z_1=\sqrt2+\sqrt2 i$$

عندما $k=1,\ \frac{\theta+2k\pi}{n}=\frac{\frac{3\pi}{2}+2\pi}{6}=\frac{\frac{3\pi+4\pi}{2}}{6}=\frac{7\pi}{12}$

$$Z_2=2\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$$

عندما $k=2,\ \frac{\theta+2k\pi}{n}=\frac{\frac{3\pi}{2}+4\pi}{6}=\frac{\frac{3\pi+8\pi}{2}}{6}=\frac{11\pi}{12}$

$$Z_3=2\left(\cos\frac{11\pi}{12}+i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$$

$k=3,\ \frac{\theta+2k\pi}{n}=\frac{\frac{3\pi}{2}+6\pi}{6}=\frac{\frac{3\pi+12\pi}{2}}{6}=\frac{5\pi}{4}$

$$Z_4=2\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$$

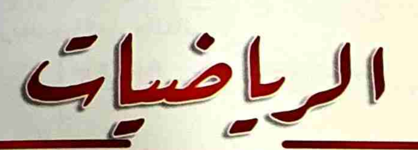
$$Z_4=2\left(-\frac{1}{\sqrt2}-\frac{1}{\sqrt2}i\right) \Rightarrow Z_4=-\sqrt2-\sqrt2 i$$

عندما $k=4,\ \frac{\theta+2k\pi}{n}=\frac{\frac{3\pi}{2}+8\pi}{6}=\frac{19\pi}{12}$

$$Z_5=2\left(\cos\frac{19\pi}{12}+i\sin\frac{19\pi}{12}\right)$$

عندما $k=5,\ \frac{\theta+2k\pi}{n}=\frac{\frac{3\pi}{2}+10\pi}{6}=\frac{23\pi}{12}$

$$Z_6=2\left(\cos\frac{23\pi}{12}+i\sin\frac{23\pi}{12}\right)$$



5 مثال أوجد الصيغة القطبية للمقدار $(\sqrt{3}+i)^2$ ثم جد الجذور الخمسة له .

الربع الأول $\sqrt{3}+i \rightarrow \overset{(x,y)}{(\sqrt{3},1)}$

$$r=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$r=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(1)^2}=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}$$

$$r=2$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$ زاوية الأسناد $\frac{\pi}{6}$

$$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{1}{2}$$ ربع أول $\theta=\frac{\pi}{6}$

$$Z^n=r^n(\cos\theta+\sin\theta)^n$$

$$Z^2=2^2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)^2$$

الصيغة القطبية $Z^2=4\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

الجذور الخمسة $Z^{\frac{1}{5}}$

$$Z^{\frac{1}{5}}=4^{\frac{1}{5}}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{\frac{1}{5}}$$

$$Z^{\frac{1}{n}}=r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right]$$

عندما $k=0,\ \frac{\theta+2k\pi}{n}=\frac{\frac{\pi}{3}+0}{5}=\frac{\pi}{15}$

$$Z_1=\sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{\pi}{15}+i\sin\frac{\pi}{15}\right)$$

عندما $k=1\quad \frac{\frac{\pi}{3}+2\pi}{5}=\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi}{5}=\frac{7\pi}{15}$

$$Z_2=\sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{7\pi}{15}+i\sin\frac{7\pi}{15}\right)$$

عندما $k=2\quad \frac{\frac{\pi}{3}+4\pi}{5}=\frac{13\pi}{15}$

$$Z_3=\sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{13\pi}{15}+i\sin\frac{13\pi}{15}\right)$$

عندما $k=3\quad \frac{\frac{\pi}{3}+6\pi}{5}=\frac{19\pi}{15}$

$$Z_4=\sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{19\pi}{15}+i\sin\frac{19\pi}{15}\right)$$

عندما $k=4\quad \frac{\frac{\pi}{3}+8\pi}{5}=\frac{25\pi}{15}=\frac{5\pi}{3}$

$$Z_5=\sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$$

مثال 6 حل المعادلة $x^3+1=0$ باستخدام مبرهنة ديموافر.

بالجذر التكعيبي $x^3=-1$

$$x=\sqrt[3]{-1} \Rightarrow x=(-1+0i)^{\frac{1}{3}}$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$r=\sqrt{(-1)^2+(0)^2} \Rightarrow r=1$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{-1}{1}=-1$$

$$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{0}{1}=0$$

$$\theta=\pi$$

$$Z^{\frac{1}{n}}=r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\theta+i\sin\theta\right]^{\frac{1}{n}}$$

$$Z^{\frac{1}{n}}=r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right]$$

عندما $k=0$ $\quad \frac{\pi+0}{3}=\frac{\pi}{3}$

$$Z_1=(1)^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$Z_1=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

عندما $k=1$ $\quad \frac{\pi+2\pi}{3}=\frac{3\pi}{3}=\pi$

$$Z_2=(1)^{\frac{1}{3}}(\cos\pi+i\sin\pi)$$

$$Z_2=-1+0i$$

عندما $k=2$

$$\theta=\frac{\pi+4\pi}{3} \Rightarrow \theta=\frac{5\pi}{3}$$

$$Z_3=(1)^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$$

$$Z_3=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

2017 - د (2)/ تطبيقي

2019 - د (3)/ أحيائي

* يمكن ان يكون منطوق السؤال بصيغة مختلفة مثل:

باستخدام ديموافر جد الجذور التكعيبية للعدد (1-)

معناها $x^3=-1 \Rightarrow (-1+0i)^{\frac{1}{3}}$

ثم نكمل الحل كما موضح اعلاه

الأسئلة الوزارية حول موضوع المقياس والسعة والصيغة القطبية ومبرهنة ديموافر

سؤال 1 إذا كان $Z=(-\sqrt{3},1)$ عدداً مركباً أكتب الشكل الجبري له ثم جد مقياسه والقيمة الاساسية للسعة.

2002 - د (2)

$$Z=-\sqrt{3}+i \rightarrow (-\sqrt{3},1) \quad (x,y)$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$r=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+(1)^2}=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}$$

$r=2$ ((المقياس))

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{1}{2}$$

زاوية الأسناد $\frac{\pi}{6}$ / الربع الثاني

$\theta=\pi-\frac{\pi}{6} \Rightarrow \theta=\frac{5\pi}{2}$ ((السعة))

سؤال 2 إذا كان $(-1+\sqrt{3}i)$ عدداً مركباً جد مقياسه والقيمة الاساسية لسعته.

2008 خارج القطر

$$Z=-1+\sqrt{3}i \rightarrow (-1,\sqrt{3}) \quad (x,y)$$ الربع الثاني

$$r=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$r=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{1+3}=\sqrt{4} \Rightarrow r=2$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{-1}{2}$$

$$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

زاوية الأسناد $\frac{\pi}{3}$ / الربع الثاني

$$\theta=\pi-\frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta=\frac{2\pi}{3}$$

سؤال 3 ضع المقدار $\frac{7+\sqrt{3}i}{1+2\sqrt{3}i}$ بالصيغة العادية للعدد المركب ثم جد مقياسه وسعته الأساسية.

2001 - د (1)

$$Z=\frac{7+\sqrt{3}i}{1+2\sqrt{3}i}\cdot\frac{1-2\sqrt{3}i}{1-2\sqrt{3}i}$$

$$Z=\frac{7-14\sqrt{3}i+\sqrt{3}i+6}{(1)^2+(2\sqrt{3})^2}=\frac{13-13\sqrt{3}i}{13}$$

$$Z=\frac{13}{13}-\frac{13\sqrt{3}i}{13} \Rightarrow Z=1-\sqrt{3}i$$

$$Z=(1,-\sqrt{3}) \quad (x,y)$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$r=\sqrt{(1)^2+(-\sqrt{3})^2}=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}$$

$r=2$ ((المقياس))

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{1}{2}$$

$$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{-\sqrt{3}}{2}$$

زاوية الأسناد $\frac{\pi}{3}$ / الربع الرابع

$\theta=2\pi-\frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta=\frac{5\pi}{3}$ ((السعة))

سؤال 4 جد المقياس والقيمة الاساسية للسعة للعدد المركب $\frac{2i}{1+i}$

2007 - د (2)

$$Z=\frac{2i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i} \Rightarrow Z=\frac{2i-2i^2}{(1)^2+(1)^2}$$

$$Z=\frac{2+2i}{2} \Rightarrow Z=1+i \quad \begin{matrix}(1,1)\\(x,y)\end{matrix}$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(1)^2+(1)^2} \Rightarrow r=\sqrt{2}$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

زاوية الأسناد $\frac{\pi}{4}$ / الربع الأول

السعة $\theta=\frac{\pi}{4}$

سؤال 5 جد المقياس والقيمة الاساسية للسعة للعدد المركب $\frac{4}{1-\sqrt{3}i}$

2008 - د (2)

$$Z=\frac{4}{1-\sqrt{3}i}\cdot\frac{1+\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i}$$

$$Z=\frac{4(1+\sqrt{3}i)}{(1)^2+(\sqrt{3})^2}=\frac{\cancel{4}(1+\sqrt{3}i)}{\cancel{4}}$$

$$Z=1+\sqrt{3}i \rightarrow (1,\sqrt{3})$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(1)^2+(\sqrt{3})^2} \Rightarrow r=2$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{1}{2}$$

$$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

زاوية الأسناد $\frac{\pi}{3}$ / الربع الأول

$$\theta=\frac{\pi}{3}$$

سؤال 6 جد المقياس والقيمة الاساسية للسعة للعدد المركب $(1+\sqrt{3}i)^2$

2008 - د (1)

إنتبه ! يجب وضع العدد المركب بصيغة $a+bi$ والتخلص من التربيع .

$$Z=1+2\sqrt{3}i-3 \Rightarrow Z=-2+2\sqrt{3}i$$

$$Z=(-2,2\sqrt{3})$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$r=\sqrt{(-2)^2+(2\sqrt{3})^2}=\sqrt{4+12}$$

$r=4$ ((المقياس))

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{-2}{4}=\frac{-1}{2}$$

$$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

زاوية الأسناد $\frac{\pi}{3}$ / الربع الثاني

$$\theta=\pi-\frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta=\frac{2\pi}{3}$$

سؤال 7 إذا كان $Z=1+\sqrt{3}i$ عدداً مركباً أكتب الشكل الديكارتي له ثم جد المقياس والسعة .

2006 - د (2)

$$Z=1+\sqrt{3}i \rightarrow (1,\sqrt{3})$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(1)^2+(\sqrt{3})^2} \Rightarrow r=2$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{1}{2}$$

$$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

زاوية الأسناد $\frac{\pi}{3}$ / الربع الأول

$$\theta=\frac{\pi}{3}$$

سؤال 8 إذا كان عدداً مركباً مقياسه 3 وسعته $\frac{\pi}{3}$ جد الشكل الديكارتي والجبري له.

2003 - د (2)

$r = 3, \quad \theta = \frac{\pi}{3}$

$x = r.\cos\theta$

$x = 3\cos\frac{\pi}{3} = 3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$

$y = r.\sin\theta$

$y = 3\ \sin\frac{\pi}{3} = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

$Z = \left(\frac{3}{2}\ ,\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ ((الديكارتي)) , $Z = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$ ((الجبري))

سؤال 9 إذا كان عدداً مركباً مقياسه (4) وسعته $\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ جد الشكل الديكارتي والجبري له.

2006 - د (1)

$r = 4 \quad , \quad \theta = \frac{5\pi}{6}$

$x = r.\cos\theta$

$x = 4.\cos\frac{5\pi}{6} = 4\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) = -2\sqrt{3}$

$y = r.\sin\theta$

$y = 4\sin\frac{5\pi}{6} = 4\left(\frac{1}{2}\right) = 2$

$Z = \left(-2\sqrt{3}, 2\right)$ ((الديكارتي)) , $Z = -2\sqrt{3} + 2i$ ((الجبري))

سؤال 10 أكتب الصيغة القطبية للعدد المركب $3 - 3\sqrt{3}i$

2015 - د (3)

$Z = 3\sqrt{3}i \rightarrow Z = \left(3, -3\sqrt{3}\right)$
(x, y) الربع الرابع

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$r = \sqrt{(3)^2 + (-3\sqrt{3})^2} = \sqrt{9+27} = \sqrt{36}$

$r = 6$

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$\sin\theta = \frac{y}{2} = \frac{-3\sqrt{3}}{6} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

زاوية الأسناد هي $\frac{\pi}{3}$

$\theta = 2\pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{3}$

$Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$Z = 6\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$

سؤال 11 جد الصيغة القطبية للعدد المركب $5 - 5i$

2014 - د (3)

$Z = 5 - 5i \rightarrow (5, -5)$ الربع الرابع
(x, y)

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$r = \sqrt{(5)^2 + (-5)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50}$

$r = 5\sqrt{2}$

زاوية الأسناد $\frac{\pi}{4}$ الربع الرابع

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-5}{5\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$\theta = 2\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow \theta = \frac{7\pi}{4}$$

$$Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$Z = 5\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$$

سؤال 12 أكتب العدد $Z=\left(1+\sqrt{3}i\right)^2$ بالصيغة القطبية.

2016 - د (1) خارج القطر

$$Z = \left(1+\sqrt{3}i\right)^2 = 1 + 2\sqrt{3}i - 3$$

$$= -2 + 2\sqrt{3}i \qquad \left(-2, 2\sqrt{3}\right) \; (x, y) \; (-, +)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4+12} = \sqrt{16}$$

$$r = 4$$

زاوية الأسناد $\frac{\pi}{3}$ الربع الثاني

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\theta = \pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}$$

$$Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$Z = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$



لو قال باستخدام ديموافر لا نفتح التربيع ونحل ديموافر n=2

سؤال 13 هل:

$$\frac{(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)^5}{(\cos 4\theta + i\sin 4\theta)^2} - (\cos\theta + i\sin\theta)^2 = 0$$

الطرف الأيسر

$$= \frac{\left[(\cos\theta + i\sin\theta)^2\right]^5}{\left[(\cos\theta + i\sin\theta)^4\right]^2} - (\cos\theta + i\sin\theta)^2$$

$$\frac{(\cos\theta + i\sin\theta)^{10}}{(\cos\theta + i\sin\theta)^8} - (\cos\theta + i\sin\theta)^2$$

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^2 - (\cos\theta + i\sin\theta)^2$$

$$= 0$$

2016 - د (2) خارج القطر

يا سارقَ الأرواحِ يا من لا يُرى
يا مقلتي يا مُتعتي وجناني
أنتَ الذي لولاكَ ما ذقتُ الهنا
لا والذي بالروحِ قد أحياني

سؤال 14 جد الجذور التكعيبية للعدد المركب $(1+i)^2$ على وفق مبرهنة ديموافر.

2015 - د (2)
خارج القطر

الربع الأول
$$Z=1+i \rightarrow Z=(1,1)$$
$$(x,y)$$
$$r=\sqrt{x^2+y^2}$$
$$r=\sqrt{(1)^2+(1)^2} \Rightarrow r=\sqrt{2}$$

زاوية الأسناد
$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\theta=\frac{\pi}{4}$$
$$Z^n=r^n(\cos\theta+i\sin\theta)^n$$
$$Z^n=\left(\sqrt{2}\right)^2\left[\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right]^2$$
$$Z^2=2\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}.2\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}.2\right)\right]$$
$$Z^2=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$
$$(Z^2)^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{1}{3}}\left[\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right]^{\frac{1}{3}}$$
$$Z^{\frac{1}{n}}=r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right]$$
$$(Z^2)^{\frac{1}{3}}$$

الجذور التكعيبية
$$\theta=\frac{\pi}{2},\ r=2,\ n=3,\ k=0,1,2$$

عندما $k=0$
$$\frac{\frac{\pi}{2}+0}{3}=\frac{\pi}{6}$$
$$Z_1=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$
$$\boxed{Z_1=\sqrt[3]{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)}$$

عندما $k=1$
$$\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3}=\frac{\frac{\pi+4\pi}{2}}{3}=\frac{5\pi}{6}$$
$$Z_2=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$$
$$\boxed{Z_2=\sqrt[3]{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)}$$

عندما $k=2$
$$\frac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{3}=\frac{\frac{\pi+8\pi}{2}}{3}=\frac{9\pi}{6}=\frac{3\pi}{2}$$
$$Z_3=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$$
$$\boxed{Z_3=\sqrt[3]{2}(0-i)}$$

ملاحظة: في السؤال (14) لم نفتح التربيع كما في سؤال (6) و (12) وذلك لان سؤال (14) باستخدام ديموافر ولايجوز فتح الأسس في ديموافر.



باستخدام ديموافر احسب $(\sqrt{3}+i)^{\frac{-3}{2}}$.

$$(\sqrt{3}+i)^{\frac{-3}{2}} = \left[(\sqrt{3}+i)^{-3}\right]^{\frac{1}{2}}$$

المبرهنة $(\sqrt{3}+i)^{-3}$

$$z = \sqrt{3}+i \Rightarrow (\sqrt{3},1)$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4}$$

$$r = 2$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{2}$$

زاوية الاسناد $= \frac{\pi}{6}$

$\theta =$ زاوية الاسناد $\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$, $n = -3$

$$z^n = r^n[\cos\theta + i\sin\theta]^n$$

$$z^{-3} = (2)^{-3}\left[\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right]^{-3}$$

$$z^{-3} = \frac{1}{8}\left[\cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2}\right]$$

نرفع الناتج الى الأس $\frac{1}{2}$ ونحل نتيجة

$$(z^{-3})^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$r = \frac{1}{8}\ ,\ \theta = \frac{\pi}{2}\ ,\ n = 2\ ,\ k = 0,1$$

$$k = 0\ ,\ \frac{\theta + 2k\pi}{n} = \frac{\frac{\pi}{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$$z_1 = \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right]$$

$$z_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$$

$$z_1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$$

$$k = 1$$

$$\frac{\theta + 2k\pi}{n} = \frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi}{2} = \frac{5\pi}{4}$$

$$z_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{5\pi}{4} - i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$$

اشارات الربع الثالث

$$z_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}} - \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)\right) = \frac{-1}{4} + \frac{1}{4}i$$

الاشارة الاصلية

2017 - د (1) أحيائي



سؤال 16 إذا كان $Z = (\cos\theta + i\sin\theta)$ أثبت ان $(1+\bar{Z})\,Z = 1 + Z$

2018 - د (2)/تطبيقي/خارج

الطرف الأيسر = $(1+\bar{Z})\,Z = \left[1+\overline{(\cos\theta + i\sin\theta)}\right](\cos\theta + i\sin\theta)$

$= \left[1+(\cos\theta - i\sin\theta)\right](\cos\theta + i\sin\theta)$

$= \left[(\cos\theta + i\sin\theta) + (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta - i\sin\theta)\right]$

$= (\cos\theta + i\sin\theta) + (\cos^2\theta + i\sin^2\theta)$

$= \cos\theta + i\sin\theta + 1 = Z + 1$ = الطرف الأيمن



سؤال 17 إذا كان $Z = \cos\theta + i\sin\theta$ أثبت ان $\dfrac{Z^n}{1+Z^{2n}} = \dfrac{1}{2\cos n\theta}$

2019 - د (2)/احيائي

الطرف الأيسر = $\dfrac{Z^n}{1+Z^{2n}} = \dfrac{1}{Z^{-n}(1+Z^{2n})}$

$= \dfrac{1}{Z^{-n}+Z^n} = \dfrac{1}{(\cos\theta + i\sin\theta)^{-n} + (\cos\theta + i\sin\theta)^n}$

$= \dfrac{1}{\cos n\theta - i\sin n\theta + \cos n\theta + i\sin n\theta}$

$= \dfrac{1}{2\cos n\theta}$ = الطرف الأيمن

الأستاذ
حيدر وليد
07701780364



المسند في الرياضيات

القطوع المخروطية

2

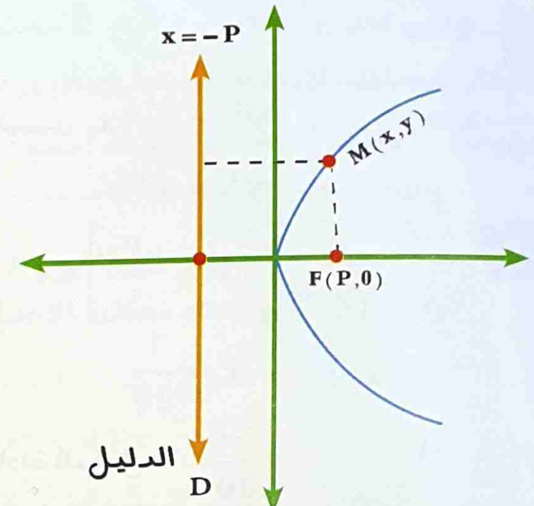
2021



07702729223
ملازم دار المغرب

القطع المكافئ

هو مجموعة النقاط في المستوي والتي يكون بعد كل منها عن نقطة ثابتة $F(P,0)$ تسمى البؤرة حيث $(P>0)$ مساوياً دائماً لبعدها عن مستقيم معلوم (D) يسمى الدليل لا يحوي البؤرة.



البعد بين بؤرة ودليل القطع المكافئ = $2P$

اشارة الدليل عكس اشارة البؤرة

للقطع المكافئ أربع حالات:

	البؤرة	معادلة الدليل	معادلة القطع القياسية
أولاً: فتحة القطع نحو اليمين	$F(P,0)$	$x=-P$	$y^2=4Px$
ثانياً: فتحة القطع نحو اليسار	$F(-P,0)$	$x=+P$	$y^2=-4Px$
ثالثاً: فتحة القطع نحو الأعلى	$F(0,P)$	$y=-P$	$x^2=4Py$
رابعاً: فتحة القطع نحو الأسفل	$F(0,-P)$	$y=+P$	$x^2=-4Py$

ملاحظة حول معادلة القطع المكافئ القياسية:

1. تحتوي على متغيرين x،y أحدهما تربيع والاخر اس (1).
2. القطع على محور المتغير الذي لا يحتوي تربيع.
3. معامل متغير التربيع = 1 . أنظر إلى معامل x^2 و y^2 في المعادلات كلها = 1 .

إذا طلب البؤرة والدليل



جد البؤرة ومعادلة الدليل لكل من القطوع المكافئ الآتية:

1 $y^2 = -8x$

$y^2 = -4Px \Rightarrow [4P = 8] \div 4 \Rightarrow P =$

معادلة الدليل $x = +2$ $F(-2,0)$ البؤرة

2 $x^2 = 4y$

$x^2 = 4Py \Rightarrow [4P = 4] \div 4 \Rightarrow P =$

معادلة الدليل $y = -1$, $F(0,1)$ البؤرة

3 $2x + 16y^2 = 0$

$[16y^2 = -2x] \div 16$

$y^2 = \frac{-1}{8}x$ نحو اليسار

$y^2 = -4Px$

$\left[4P = \frac{1}{8}\right] \div 4 \Rightarrow P = \frac{1}{32}$

معادلة الدليل $x = \frac{1}{32}$, $F\left(\frac{-1}{32}, 0\right)$ البؤرة

4 $\frac{1}{2}y^2 = 8x$

ضرب المعادلة اعلاه في (2) لجعل معامل y^2 يساوي احد حسب ملاحظات معادلة القطع المكافئ القياسية.

$y^2 = 16x$

يمين $y^2 = 4Px \Rightarrow [4P = 16] \div 4$

$P = 4$

معادلة الدليل $x = -4$, $F(4,0)$ البؤرة

5 $\frac{1}{5}x - y^2 = 0$

$\frac{1}{5}x = y^2 \Rightarrow y^2 = \frac{1}{5}x$ نحو اليمين

$y^2 = 4Px$

$\left[4P = \frac{1}{5}\right] \div 4$

$P = \frac{1}{20}$

معادلة الدليل $x = \frac{-1}{20}$, $F\left(\frac{1}{20}, 0\right)$ البؤرة

6 $3x^2 - 24y = 0$

$[3x^2 = 24y] \div 3 \Rightarrow x^2 = 8y$

$x^2 = 4Py$

$[4P = 8] \div 4 \Rightarrow P = 2$

معادلة الدليل $y = -2$, $F(0,2)$ البؤرة

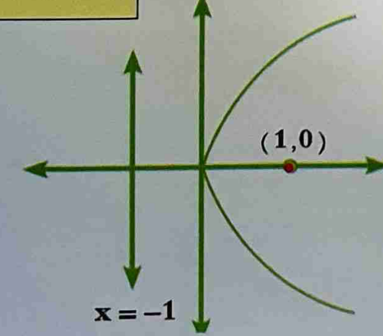
7 $y^2 = 4x$

$y^2 = 4Px \Rightarrow [4P = 4] \div 4 \Rightarrow P = 1$

$F(1,0)$, $x = -1$

إذا طلب الرسم:
نأخذ قيم لـ x
ونعوضها بالمعادلة
ونجد y ثم نرسم.

x	y	(x,y)
0	0	(0,0)
1	± 2	$(1, \pm 2)$
3	$\pm 2\sqrt{3}$	$(3, \pm 2\sqrt{3})$



إيجاد معادلة القطع المكافئ

لايجاد معادلة القطع المكافئ هناك خمس حالات:

أولاً: إذا أعطى بؤرة القطع المكافئ F معناها أعطى P

1. نختار المعادلة المناسبة حسب البؤرة .
2. نعوض P مباشرة ⟵ **إنتبه!** نعوض P موجبة دائماً في المعادلة القياسية .

مثال 1 جد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته (0,5) ورأسه نقطة الاصل .

$F(0,5)$ → أعلى → $P=5$

$x^2=4Py$

$x^2=4(5)y \Rightarrow x^2=20y$

مثال 4 جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل وبؤرته (0,−4) .

$(0,-4)$ → أسفل → $P=4$

$x^2=-4Py$

$x^2=-4(4)y \Rightarrow x^2=-16y$

مثال 2 جد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته (3,0) ورأسه نقطة الاصل .

$F(3,0)$ → يمين → $P=3$

$y^2=4Px$

$y^2=4(3)x \Rightarrow y^2=12x$

مثال 5 جد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته (5,0) ورأسه نقطة الاصل .



$(5,0) \Rightarrow$ يمين $\Rightarrow P=5$

$y^2=4Px$

$y^2=4(5)x \Rightarrow y^2=20x$

مثال 3 جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل وبؤرته $(0,\sqrt{2})$.

$F(0,\sqrt{2})$ → أعلى → $P=\sqrt{2}$

$x^2=4Py$

$x^2=4(\sqrt{2})y \Rightarrow x^2=4\sqrt{2}y$

مثال 6 جد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته (−4,0) ورأسه نقطة الاصل .

$(-4,0)$ → يسار → $P=4$ نعوض (+)

$y^2=-4Px \Rightarrow y^2=-16x$

ثانياً: إذا أعطى معادلة الدليل معناها أعطى (P) وتذكر ان اشارة الدليل عكس اشارة البؤرة .

مثلاً: إذا اعطى معادلة الدليل

$x=+3$ البؤرة سالبة لأن الدليل + ((القطع يسار X))

$y=-5$ البؤرة موجبة لأن الدليل − ((القطع أعلى y))

$x=-\sqrt{2}$ البؤرة موجبة لأن الدليل − ((القطع يمين X))

7 مثال جد معادلة القطع المكافئ الذي معادلة دليله $y = 7$ والرأس نقطة الاصل.

$y = 7 \rightarrow P = 7$

البؤرة سالبة لأن الدليل (+) / أسفل (y)

$x^2 = -4Py$

$x^2 = -4(7)y$

$x^2 = -28y$

8 مثال جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل ومعادلة دليله $2x - 6 = 0$.

$2x - 6 = 0$

$[2x = 6] \div 2 \Rightarrow x = 3$

$P = 3$ لبؤرة سالبة لأن الدليل موجب

$y^2 = -4Px \Rightarrow y^2 = -4(3)x$

$y^2 = -12x$

9 مثال جد معادلة القطع المكافئ الذي معادلة دليله $4y + 3 = 0$ ورأسه نقطة الاصل.

$4y + 3 = 0$

$[4y = -3] \div 4 \Rightarrow y = \frac{-3}{4}$

البؤرة موجبة لأن الدليل سالب

$P = \frac{3}{4}$

$x^2 = 4Py \Rightarrow x^2 = 4\left(\frac{3}{4}\right)y$

$x^2 = 3y$

إنتبه ! لاتنسى ان تعويض P يكون موجب دائماً في المعادلة القياسية

ثالثاً : إذا أعطى في السؤال نقطتين وقال ان القطع يمر بالنقطتين فإن خطوات لحل هي:

1. نعين النقاط في الارباع لتحديد فتحة القطع.
2. نختار المعادلة المناسبة حسب فتحة القطع.
3. نعوض واحدة من النقاط بـ x , y ونجد P ونعوض (P) بالمعادلة القياسية.

مثال 10

جد معادلة القطع المكافئ الذي يمر بالنقطتين $(2,-4)$ ، $(2,4)$ والرأس نقطة الاصل .

$(2,4)$ ← ربع أول

$(2,-4)$ ← ربع رابع

تعيين النقاط في الارباع وتحديد القطع

اختيار المعادلة المناسبة حسب فتحة القطع $y^2 = 4Px$ ←

تعويض واحدة من النقاط $(4)^2 = 4P(2)$

تعويض P في المعادلة القياسية $[16 = 8P] \div 8 \Rightarrow P = 2$

$y^2 = 8x$

مثال 11

جد معادلة القطع المكافئ الذي يمر بالنقطتين $(2,5)$, $(2,-5)$ والرأس نقطة الاصل .

$(2,5)$ ← ربع أول

$(2,-5)$ ← ربع رابع

القطع نحو اليمين .

$y^2 = 4Px \qquad (2,5)$

$(5)^2 = 4(P)(2)$

$[25 = 8P] \div 8 \Rightarrow P = \frac{25}{8}$

$y^2 = 4\left(\frac{25}{8}\right)x \Rightarrow y^2 = \frac{25}{2}x$

مثال 12

جد معادلة القطع المكافئ الذي يمر من $(-1,2)$ $(\sqrt{3},6)$ ولأسه نقطة الاصل ... اضافي .

$(\sqrt{3},6)$ ربع أول

$(-1,2)$ ربع ثاني

القطع نحو الأعلى .

نختار أي نقطة $(\sqrt{3},6)$

$x^2 = 4Py$

$(\sqrt{3})^2 = 4P(6)$

$[3 = 24P] \div 24 \Rightarrow P = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$

$x^2 = 4\left(\frac{1}{8}\right)y \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2}y$

إستراحة شعرية:

رَماكَ الحاسدونَ بكُلِ عَيبٍ
وعيبكَ أنّ حسنكَ لا يُعابُ

رابعاً : إذا أعطى نقطة واحدة فقط (x, y) وقال ان القطع يمر من النقطة (x, y) هناك حالتان :

الأولى ان يحدد موقع البؤرة (على محور السينات أو الصادات) وهنا يوجد معادلة واحدة للقطع ⟵ تابع المثال .

مثال 13 جد معادلة القطع المكافئ الذي يمر من النقطة $(-1,8)$ وبؤرته على محور السينات ورأسه نقطة الأصل . . . اضافي .

$(-1,8) \rightarrow$ ربع ثاني

البؤرة سينات ⟵ يسار

$y^2 = -4Px \qquad (-1,8)$

$8^2 = -4P(-1)$

$64 = 4P \Rightarrow P = \frac{64}{4} \Rightarrow P = 16$

$y^2 = -4(16)x \Rightarrow y^2 = -64x$

مثال 14 جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ويمر من النقطة $(\sqrt{2}, 1)$ وبؤرته على محور الصادات . . . اضافي .

$(\sqrt{2}, 1) \rightarrow$ ربع أول

البؤرة صادات ⟵ أعلى

$x^2 = 4Py \qquad (\sqrt{2}, 1)$

$(\sqrt{2})^2 = 4P(1)$

$[2 = 4P] \div 4 \Rightarrow P = \frac{1}{2}$

$x^2 = 4\left(\frac{1}{2}\right)y \Rightarrow x^2 = 2y$



الثانية لا يحدد موقع البؤرة لذلك هناك احتمالين — بؤرة سينات / بؤرة صادات

مثال 15 جد معادلة القطع المكافئ الذي يمر من النقطة $(-2,-4)$ ورأسه نقطة الأصل .

بؤرة سينات/يسار

$y^2 = -4Px$

$(-4)^2 = -4P(-2)$

$[16 = 8P] \div 8 \Rightarrow P = \frac{16}{8} \Rightarrow P = 2$

$y^2 = -8x$

بؤرة صادات/ اسفل

$x^2 = -4Py$

$(-2)^2 = -4P(-4)$

$[4 = 16P] \div 16 \Rightarrow P = \frac{4}{16} \Rightarrow P = \frac{1}{4}$

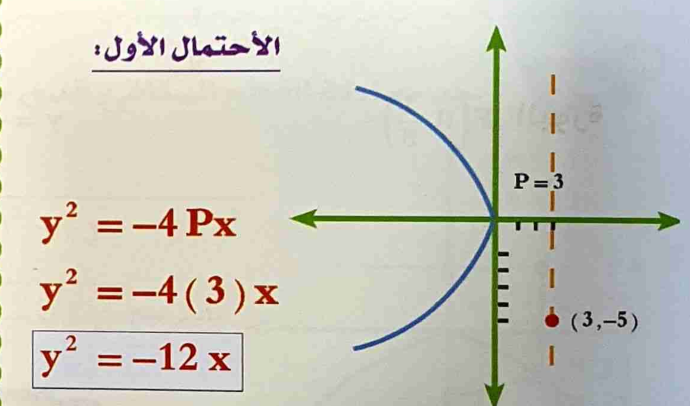
$x^2 = -4\left(\frac{1}{4}\right)y \Rightarrow x^2 = -y$

خامساً : إذا أعطى في السؤال نقطة (x,y) وقال ان دليل القطع يمر من هذه النقطة .

إنتبه ! لا نعوض هذه النقطة أبداً في معادلة القطع المكافئ القياسية لأن القطع لا يمر بها ولا تحقق معادلة القطع .

مثال 16 جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ويمر دليل القطع بالنقطة $(3,-5)$.

الأحتمال الأول:

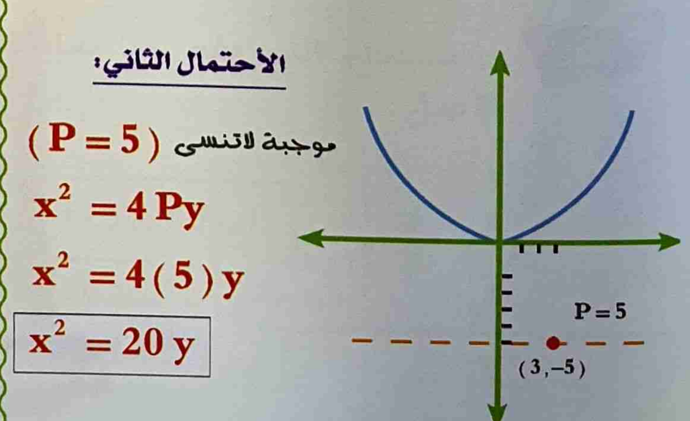


$y^2 = -4Px$

$y^2 = -4(3)x$

$\boxed{y^2 = -12x}$

الأحتمال الثاني:



$(P=5)$ موجبة لاتنسى

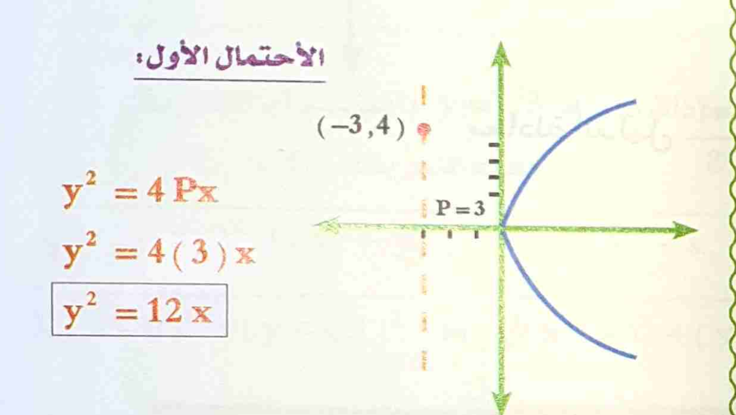
$x^2 = 4Py$

$x^2 = 4(5)y$

$\boxed{x^2 = 20y}$

مثال 17 إذا كان دليل القطع المكافئ يمر بالنقطة $(-3,4)$ والرأس نقطة الأصل جد معادلة القطع .

الأحتمال الأول:

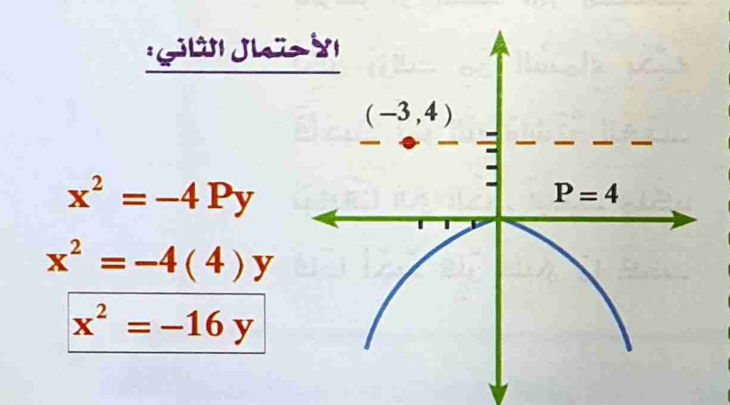


$y^2 = 4Px$

$y^2 = 4(3)x$

$\boxed{y^2 = 12x}$

الأحتمال الثاني:



$x^2 = -4Py$

$x^2 = -4(4)y$

$\boxed{x^2 = -16y}$

مثال 18

قطع مكافئ معادلته $Ax^2 + 8y = 0$ ويمر من النقطة $(1,2)$ جد قيمة (A) ثم جد البؤرة والدليل وارسم القطع .

(x,y)

$(1,2)$

$Ax^2 + 8y = 0$

$A(1)^2 + 8(2) = 0$

$A + 16 = 0 \Rightarrow A = -16$

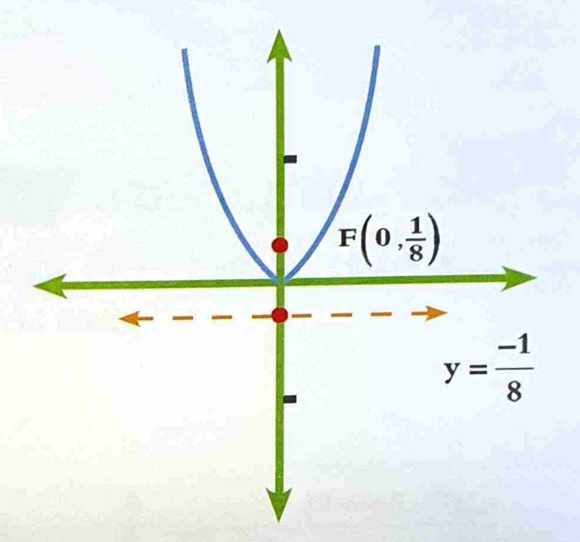
$-16x^2 + 8y = 0 \Rightarrow [-16x^2 = -8y] \div -16$

$\frac{-16x^2}{-16} = \frac{-8y}{-16} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2}y$ أعلى

$x^2 = 4Py$

$\left[4P = \frac{1}{2}\right] \div 4$

$P = \frac{1}{8}$



البؤرة $F\left(0,\frac{1}{8}\right)$

معادلة الدليل $y = \frac{-1}{8}$

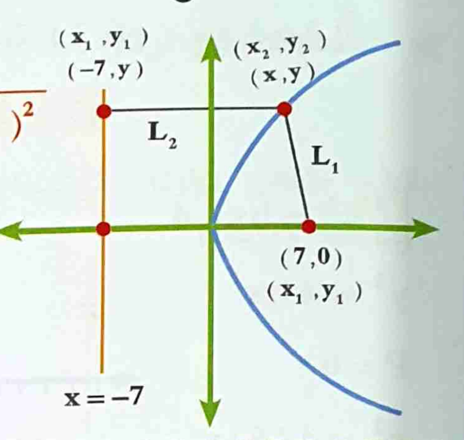
وَأُحِبُّهُ فِي اللهِ لا أَدرِي السَّبَب
بِالرَّغمِ أَنَّ الحُبَّ أَمرٌ مُكتَسَب
لَكِن رُزِقتُ مِنَ السَّمَاءِ بِحُبِّهِ
فَأَجَبتُ أَمرَ اللهِ وَاشتَدَّ العَجَب
نَبَضَاتُنَا فِي الحُبِّ لَيسَت مِلكَنَا
فَإِذَا أُحِبُّ فَإِنَّ قَلبِي مَا كَذَب

إيجاد معادلة القطع المكافئ باستخدام التعريف



مثال 19 باستخدام التعريف جد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته $(7,0)$ والرأس نقطة الأصل.

حسب التعريف $L_1 = L_2$



$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$\sqrt{(x-7)^2+(y-0)^2} = \sqrt{(x+7)^2+(y-y)^2}$$ بالتربيع

$$x^2-14x+49+y^2 = x^2+14x+49+0^2$$

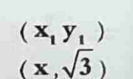
مربع حدانية   مربع حدانية

$$y^2 = 14x+14x \Rightarrow y^2 = 28x$$

مثال 20 جد معادلة القطع المكافئ الذي معادلة دليله $y=\sqrt{3}$ باستخدام التعريف.

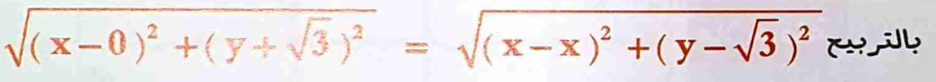
حسب التعريف $L_1 = L_2$





$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$\sqrt{(x-0)^2+(y+\sqrt{3})^2} = \sqrt{(x-x)^2+(y-\sqrt{3})^2}$$ بالتربيع



$$x^2+y^2+2\sqrt{3}y+3 = 0^2+y^2-2\sqrt{3}y+3$$

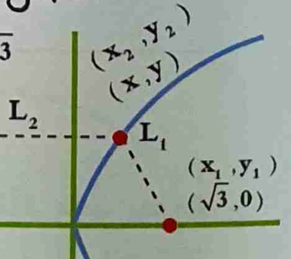
$$x^2 = -2\sqrt{3}y-2\sqrt{3}y \Rightarrow x^2 = -4\sqrt{3}y$$

2005 - تمهيدي

$y=\sqrt{3}$, L_2, (x,y), (x_2,y_2), L_1, $(0,-\sqrt{3})$, (x_1,y_1)

مثال 21 باستخدام التعريف جد معادلة قطع مكافئ بؤرته $(\sqrt{3},0)$ والرأس نقطة الأصل.

حسب التعريف $L_1 = L_2$



$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$\sqrt{(x-\sqrt{3})^2+(y-0)^2} = \sqrt{(x+\sqrt{3})^2+(y-y)^2}$$

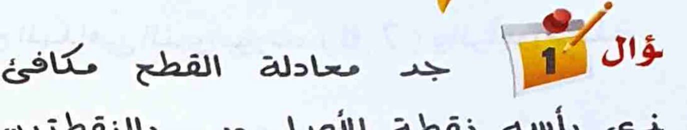
بالتربيع

$$x^2-2\sqrt{3}x+3+y^2 = x^2+2\sqrt{3}x+3+0$$

$$y^2 = 4\sqrt{3}x$$



الأسئلة الوزارية حول موضوع القطع المكافئ



سؤال 1 جد معادلة القطع مكافئ ذي رأسه نقطة الأصل ويمر بالنقطتين $(-3,6)$, $(3,6)$ ثم جد معادلة دليله.

200 - د (1)

$(3,6) \rightarrow$ ربع أول

$(-3,6) \rightarrow$ ربع رابع

$x^2 = 4Py$ ((نحو الأعلى))

(x,y)

$(3,6)$

$(3)^2 = 4P(6)$

$9 = 24P \Rightarrow P = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$

$x^2 = 4\left(\frac{3}{8}\right)y \Rightarrow \boxed{x^2 = \frac{3}{2}y}$

معادلة الدليل $y = -P \Rightarrow y = -\frac{3}{8}$

سؤال 2 جد معادلة القطع المكافئ ذي رأسه نقطة الأصل ويمر بالنقطتين $(1,3)$, $(1,-3)$ ثم جد معادلة دليله.

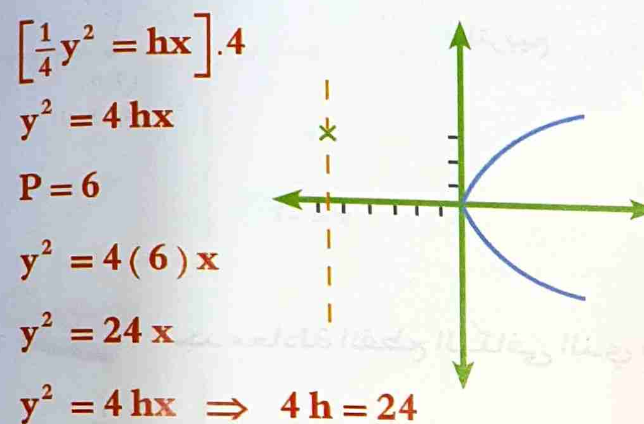
200 - د (2)

الجواب / $y^2 = 9x$

معادلة الدليل $x = \frac{-9}{4}$

سؤال 3 قطع مكافئ معادلته $\frac{1}{4}y^2 = hx$ دليله يمر بالنقطة $(-6,3)$ جد قيمة h.

2008 تمهيدي | 2018 - د (3)



$\left[\frac{1}{4}y^2 = hx\right].4$

$y^2 = 4hx$

$P = 6$

$y^2 = 4(6)x$

$y^2 = 24x$

$y^2 = 4hx \Rightarrow 4h = 24$

$h = 6$

ملاحظة

عرفنا ان القطع على محور السينات لأن المعدلة بدلالة (y^2).

ولا يمكن تعويض النقطة $(-6,3)$ لأن الذي يمر بها الدليل وليس القطع.

إستراحة شعرية:

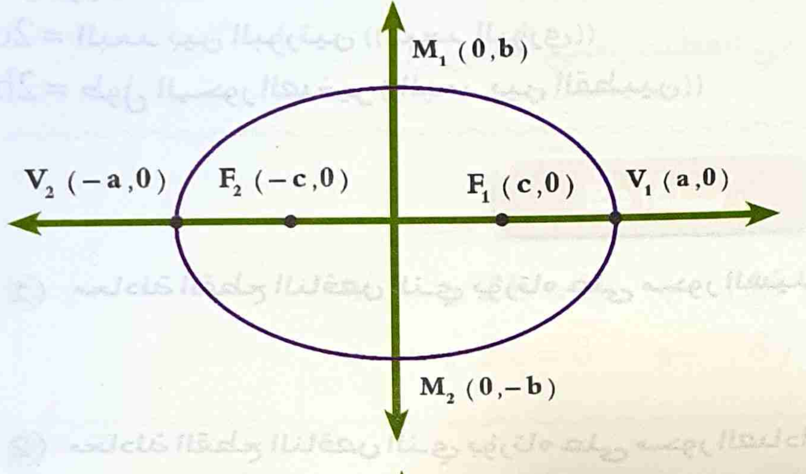
فيا ليتَ الذي بيني وبينك بابٌ يطرقُ

وياليتَ أطرافَ الأرض تُطوى فنلتقي

القطع الناقص Ellipse

تعريف: هو مجموعة النقط على المستوي التي يكون مجموع بعديها عن نقطتين ثابتين (البؤرتان) عدد ثابت .

المصطلحات والرموز:



((قطع ناقص بؤرتاه تنتميان لمحور السينات))

$V_1\ (0,a)$

$F_1\ (0,c)$

$M_2\ (-b,0)$ $M_1\ (b,0)$

$2a$ $2c$

$F_2\ (0,-c)$

$V_2\ (0,-a)$

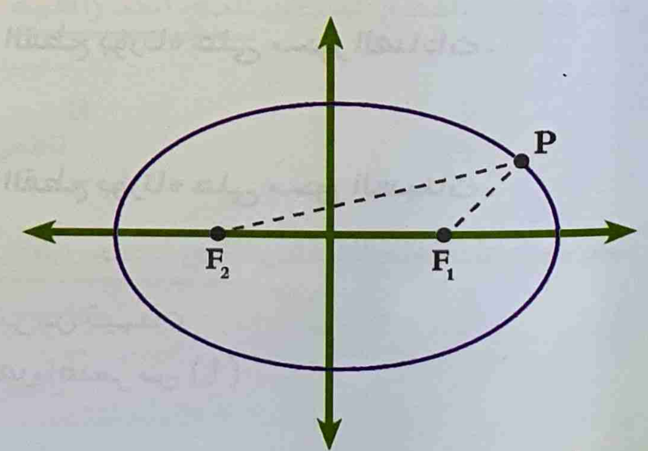
$2b$

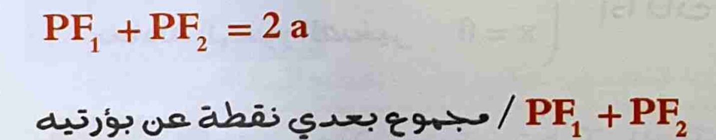
((قطع ناقص بؤرتاه تنتميان لمحور الصادات))

الرأسان ← $V_1\ ,\ V_2$

البؤرتان ← $F_1\ ,\ F_2$

القطبان ← $M_1\ ,\ M_2$





$PF_1 + PF_2 = 2a$

$PF_1 + PF_2$ / مجموع بعدي نقطة عن بؤرتيه

مصطلحات

2a = طول المحور الكبير ((البعد بين الرأسين)) ... ((العدد الثابت))...((مجموع بعدي نقطة عن بؤرتيه))

2c = البعد بين البؤرتين ((البعد البؤري))

2b = طول المحور الصغير ((البعد بين القطبين))

قوانين

1. معادلة القطح الناقص الذي بؤرتاه على محور السينات $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

2. معادلة القطح الناقص الذي بؤرتاه على محور الصادات $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$

3. لايجاد مساحة القطح الناقص $A=a\ b\ \pi$

4. لايجاد محيط القطح الناقص $P=2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

5. لايجاد الاختلاف المركزي $e=\frac{c}{a}$ $e<1$ أصغر من (1)

6. القانون العام للقطح الناقص $a^2=b^2+c^2$

$\longleftarrow b=\sqrt{a^2-c^2}$

$\longleftarrow c=\sqrt{a^2-b^2}$

* معادلة المحور الكبير $x=0$
  معادلة المحور الصغير $y=0$
  إذا كان القطع بؤرتاه على محور الصادات .

* معادلة المحور الكبير $y=0$
  معادلة المحور الصغير $x=0$
  إذا كان القطع بؤرتاه على محور السينات .

إنتبه ! قيمة a أكبر من قيمة b وكذلك أكبر من قيمة c
الاختلاف المركزي في القطح الناقص اصغر من (1)

ملاحظات حول القطع الناقص

أولاً عندما يعطي

- إحداثي البؤرة يعني أعطى c
- إحداثي الرأس يعني أعطى a
- إحداثي القطب يعني أعطى b

ثانياً إذا اعطى :

1. طول المحور الكبير / مثلاً $(12) \leftarrow 2a = 12$ ونجد a
2. طول المحور الصغير / مثلاً $(16) \leftarrow 2b = 16$ ونجد b
3. البعد بين البؤرتين / مثلاً $(8) \leftarrow 2c = 8$ ونجد c

ثالثاً إذا أعطى المساحة او المحيط أو الاختلاف المركزي فهذا يجعلك تفكر بهذه القوانين وذلك لايجاد مجهول إذا السؤال مباشر أو لايجاد علاقة من هذه القوانين تساعد في الحل .

رابعاً العلاقة بين القطعين المكافئ والناقص: عندما يكون السؤال يحوي قطع مكافئ وناقص يجب ترجمة الكلام وتحويله الى معادلة رياضية كما موضح في الامثلة التوضيحية أدناه:

جد معادلة القطع الناقص الذي احدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ . . . الخ .

$$c_{\text{ناقص}} = P_{\text{مكافئ}}$$

جد معادلة القطع الناقص الذي احد راسيه هو بؤرة القطع المكافئ . . . الخ .

$$a_{\text{ناقص}} = P_{\text{مكافئ}}$$

جد معادلة القطع الناقص الذي احدى بؤرتيه تنطبق على بؤرة القطع المكافئ . . . الخ .

$$c_{\text{ناقص}} = P_{\text{مكافئ}}$$

خامساً تحويل العبارات الى علاقات رياضية (معادلات) :

1. مجموع طولي محوريه ← $2a+2b$
2. مجموع مربعي طولي محوريه ← $(2a)^2+(2b)^2$
3. الفرق بين طولي محوريه ← إذا كان الفرق (+) $2a-2b$ ، إذا كان الفرق (−) $2b-2a$

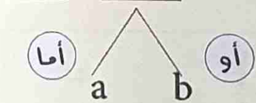
سادساً إذا أعطى في السؤال نقطة (x, y) يمر بها المنحني أو تنتمي الى المنحني نستفيد من معادلة القطع القياسية $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ أو $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ حيث يتم تعويض النقطة في المعادلة القياسية ولكن بشرط لا تحوي النقطة احداثي صفر .

سابعاً عبارات (يمر- يقطع-يمس) :

1. إذا ذكر عبارة يمر بنقطة $(x, 0)$ أو $(0, y)$ شرط ان يكون اما $x=0$ أو $y=0$ في النقطة .
فهذا يعني أما (a) أو (b) سوف يمثل اما (a) أو (b)

2. كل يمس سوف يمثل اما (a) أو (b)

* جد معادلة القطع الناقص الذي يمس دليل القطع المكافئ ... الخ .



P ← سوف يمثل اما (a) أو (b)

سادساً إذا ذكر عبارة نقطة التقاطع مع محور السينات أو الصادات :

1) نقطة التقاطع مع محور السينات معناها نعوض بمعادلة المنحني أو معادلة المستقيم المعطاة في السؤال $y=0$.

أمثلة توضيحية

جد معادلة القطع الناقص الذي احدى بؤرتيه نقطة تقاطع المستقيم $2x - y = 8$ مع محور السينات . . .الخ

$2x - y = 8 \qquad y = 0 \longrightarrow$ نعوض

$2x - 0 = 8 \Rightarrow [2x = 8] \div 2$

تصبح بؤرة للقطع الناقص كما ذكر في السؤال $\longleftarrow (4 , 0) \Leftarrow x = 4$

2) نقطة التقاطع مع محور الصادات معناها نعوض بمعادلة المنحني أو معادلة المستقيم المعطاة في السؤال $x=0$.

جد معادلة القطع الناقص الذي احدى رأساه نقطتا تقاطع المنحني $x^2 + y^2 - 3x = 16$ مع محور الصادات . . . الخ

$x^2 + y^2 - 3x = 16 \quad , \quad x = 0$

$(0)^2 + y^2 - 3(0) = 16 \Rightarrow y^2 = 16 \Rightarrow \boxed{y \pm 4}$

$\boxed{x = 0}$

يصبحان رأسان للقطع الناقص كما ذكر في السؤال $\longrightarrow (0,4) \quad , \quad (0,-4)$

تاسعاً إذا ذكر عبارة يقطع فهي على نوعين :

النوع الأول يقطع محور السينات عند رقم $x = \pm$ أو يقطع محور الصادات عند رقم $y = \pm$

سوف يمثل اما (a) أو (b) ويؤخذ موجب

النوع الثاني إذا ذكر في السؤال ان القطع الناقص يقطع منحني ففي هذه الحالة نتبع ما يلي :

a) نعوض الاحداثي المعطى في السؤال بمعادلة المنحني .

b) بعد التعويض يصبح لدينا احداثي كامل من x و y .

c) تعوض هذه النقطة بمعادلة القطع القياسية ونكمل الحل .

عاشراً ملاحظات أخرى

1 النسبة : وهي على نوعين :

النوع الأول النسبة بين طولي محوريه

أما $\frac{2a}{2b}$ عندما النسبة أكبر من (1) أو $\frac{\text{رقم كبير}}{\text{رقم صغير}}$

أو $\frac{2b}{2a}$ عندما النسبة أصغر من (1) أو $\frac{\text{رقم صغير}}{\text{رقم كبير}}$

النوع الثاني النسبة بين أطوال أخرى

مثلاً :

النسبة بين طول محوره الكبير الى البعد بين البؤرتين $= \frac{2a}{2c}$

بسط (2a) مقام (2c)

بعد كلمة إلى يصبح مقام دائماً

مثلاً :

النسبة بين البعد بين بؤرتيه الى طول محوره الصغير $= \frac{2c}{2b}$

بسط (2c) مقام (2b)

يراجع السؤال الأول والثاني في الاسئلة الوزارية بما يخص فكرة النسبة

2 بعض المصطلحات الاضافية :

* مجموع طول محوره الكبير ونصف طول محوره الصغير

$$2a + \frac{1}{2}(2b)$$

طول محوره الكبير ، مجموع ، نصف طول محوره الصغير

كل يزيد على الاشارة سالبة

* طول محوره الكبير يزيد على طول محوره الصغير $2a - 2b$

---

3 وجود معادلة القطع المكافئ في سؤال القطع الناقص يجعلك تفكر بايجاد قيمة p من معادلة القطع المكافئ والعودة الى ملاحظات الربط الموضحة في النقطة (رابعاً) .

---

4 إذا ذكر عبارة القطع المكافئ ولم تجد في السؤال معادلة القطع المكافئ فعليك أولاً التفكير في ايجاد قيمة p ومعادلة القطع المكافئ لانها مفتاح الحل ولايجاد معادلة القطع المكافئ عليك ان تستند على الملاحظات التي سبق شرحها في القطع المكافئ .

الجزء الأول

إذا اعطى معادلة القطع الناقص وطلب معلومات القطع مثل (البؤرتان - الرأسان ... المساحة ... المحيط ... الخ) .

1 يجب ان نضع المعادلة بالشكل القياسي

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$
سينات

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$
صادات

2 يجب ان يكون معامل x^2 ومعامل y^2 يساوي واحد

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$
هنا لازم واحد

3 إذا كان هناك ثابت (رقم) بعد اليساوي وكان عدد صحيح (ليس كسر) نقسم عليه المعادلة .

مثال توضيحي $16x^2+9y^2=144$

$$\left[16x^2+9y^2=144\right]\div 144$$

$$\frac{16x^2}{144}+\frac{9y^2}{144}=\frac{144}{144}\Rightarrow \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$$

إذا كان بعد اليساوي كسر نضرب المعادلة في مقلوب الكسر تابع المثال التوضيحي التالي :

$$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{3}=\frac{2}{3}$$

نضرب في مقلوب $\frac{2}{3}$ وهو $\frac{3}{2}$

$$\frac{x^2}{\cancel{12}_{4}}\left(\frac{\cancel{3}^{1}}{2}\right)+\frac{y^2}{\cancel{3}}\left(\frac{\cancel{3}}{2}\right)=\frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}\right)\Rightarrow \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$$

إنتبه !

في حالة وجود عدد (معامل) x^2 أو y^2 يصبح مقام للمقام ⟵ مثلاً

$$\frac{3x^2}{5}+\frac{2y^2}{7}=1$$
ينزل تحت المقام

$$\frac{x^2}{\frac{5}{3}}+\frac{y^2}{\frac{7}{2}}=1$$

مثال 1 جد طول كل من المحورين وإحداثي البؤرتين والرأسين والاختلاف المركزي ومساحة ومحيط القطع الناقص.

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$$ ((المعادلة بالشكل القياسي)) لاتحتاج ترتيب

العدد الاكبر هو 25 $\rightarrow a^2=25$

العدد الاصغر هو 16 $\rightarrow b^2=16$

$a^2=25 \Rightarrow a=5$

$b^2=16 \Rightarrow b=4$

$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow c=\sqrt{a^2-b^2}$

$c=\sqrt{25-16}=\sqrt{9}$

$c=3$

طول المحور الكبير $=2a=2(5)=10$ وحدة

طول المحور الصغير $=2b=2(4)=8$ وحدة

((البؤرتان)) $F_1(c,0) \rightarrow F_1(3,0)$
$F_2(-c,0) \rightarrow F_2(-3,0)$

((الرأسان)) $V_1(a,0) \rightarrow V_1(5,0)$
$V_2(-a,0) \rightarrow V_2(-5,0)$

$e=\frac{c}{a}=\frac{3}{5}=0.6<1$ ((أصغر))

$A=a.b\pi \Rightarrow A=(5\times4)\pi=20\pi$ وحدة مربعة

$P=2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}=2\pi\sqrt{\frac{25+16}{2}}$

$P=2\pi\sqrt{\frac{41}{2}}$ وحدة

مثال 2 عين كل من البؤرتين والرأسين والقطبين والمركز ثم جد طول ومعادلة كل من المحورين والاختلاف المركزي القطع

$$x^2+2y^2=1$$

$\frac{x^2}{1}+\frac{2y^2}{1}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{\frac{1}{2}}=1$

((سينات)) الأكبر $a^2=1 \Rightarrow a=1$

الأصغر $b^2=\frac{1}{2} \Rightarrow b=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow c=\sqrt{a^2-b^2}$

$c=\sqrt{1-\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}}$

$\therefore c=\frac{1}{\sqrt{2}}$

((البؤرتان)) $F_1(c,0) \rightarrow F_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$
$F_2(-c,0) \rightarrow F_2\left(\frac{-1}{\sqrt{2}},0\right)$

((الرأسان)) $V_1(a,0) \rightarrow V_1(1,0)$
$V_2(-a,0) \rightarrow V_2(-1,0)$

((القطبان)) $M_1(0,b) \rightarrow M_1\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
$M_2(0,-b) \rightarrow M_2\left(0,\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$

طول المحور الكبير $=2a=2(1)=2$ وحدة

طول المحور الصغير $=2b=2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}$ وحدة

معادلة المحور الكبير $\leftarrow y=0$

معادلة المحور الصغير $\leftarrow x=0$

$e=\frac{c}{a}=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1}=\frac{1}{\sqrt{2}}<1$ ((أصغر))

* المركز $(0,0)$ O نقطة الأصل

مثال 3 عين البؤرتان والرأسان والقطبان والمركز ثم جد طول ومعادلة المحورين والاختلاف المركزي للقطع $9x^2 + 13y^2 = 117$

$9x^2 + 13y^2 = 117 \rightarrow \div 117$ ((ملاحظة ثالثاً))

$$\frac{9x^2}{117} + \frac{13y^2}{117} = \frac{117}{117} \Rightarrow \frac{x^2}{13} + \frac{y^2}{9} = 1$$

(سينات) $a^2 = 13 \Rightarrow a = \sqrt{13}$

$b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{13 - 9}$

$c = \sqrt{4} \Rightarrow c = 2$

البؤرتان
$F_1(c,0) \rightarrow F_1(2,0)$
$F_2(-c,0) \rightarrow F_2(-2,0)$

الرأسان
$V_1(a,0) \rightarrow V_1(\sqrt{13},0)$
$V_2(-a,0) \rightarrow V_2(-\sqrt{13},0)$

((القطبان))
$M_1(0,b) \rightarrow M_1(0,3)$
$M_2(0,-b) \rightarrow M_2(0,-3)$

طول المحور الكبير $= 2a = 2(\sqrt{13}) = 2\sqrt{13}$ وحدة

طول المحور الصغير $= 2b = 2(3) = 6$ وحدة

معادلة المحور الكبير $y = 0$

معادلة المحور الصغير $x = 0$

---

* المركز $O(0,0)$ نقطة الأصل

الأختلاف المركزي $e = \frac{c}{a} = \frac{2}{\sqrt{13}}$

مثال 4 ناقش القطع الناقص $4x^2 + 3y^2 = \frac{4}{3}$

$$4x^2\left(\frac{3}{4}\right) + 3y^2\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{4}{3}\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$\frac{3x^2}{1} + \frac{9y^2}{4} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{3}} + \frac{y^2}{\frac{4}{9}} = 1$$

(صادات) الأكبر $\frac{4}{9} \rightarrow a^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow a = \frac{2}{3}$

الأصغر $\frac{1}{3} \rightarrow b^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow b = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{\frac{4}{9} - \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{4-3}{9}}$

$c = \sqrt{\frac{1}{9}} \Rightarrow c = \frac{1}{3}$

البؤرتان
$F_1(0,c) \rightarrow F_1\left(0,\frac{1}{3}\right)$
$F_2(0,-c) \rightarrow F_2\left(0,\frac{-1}{3}\right)$

الرأسان
$V_1(0,a)$ $V_1\left(0,\frac{2}{3}\right)$
$V_2(0,-a)$ $V_2\left(0,-\frac{2}{3}\right)$

((القطبان))
$M_1(b, 0)$ $M_1\left(\frac{1}{\sqrt{3}},0\right)$
$M_2(-b, 0)$ $M_2\left(\frac{-1}{\sqrt{3}},0\right)$

طول المحور الكبير $= 2a = 2\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}$ وحدة

طول المحور الصغير $= 2b = 2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}$ وحدة

البعد بين البؤرتين $= 2c = 2\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$ وحدة

معادلة المحور الكبير $\Leftarrow x = 0$

معادلة المحور الصغير $\Leftarrow y = 0$

$A = a.b\pi = \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\pi = \frac{2}{3\sqrt{3}}\pi$ وحدة مربعة

$P = 2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{4}{9}+\frac{1}{3}}{2}} = 2\pi\sqrt{\frac{7}{18}}$ وحدة

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

إيجاد معادلة القطع الناقص

الجزء الثاني

لإيجاد معادلة القطع الناقص يجب مراجعة الملاحظات السابقة وسوف نذكر كل ملاحظة مع الأمثلة الخاصة بها.

أولاً عندما يعطي
- إحداثي البؤرة يعني أعطى c
- إحداثي الرأس يعني أعطى a
- إحداثي القطب يعني أعطى b

ثانياً إذا أعطى :
1. طول المحور الكبير / مثلاً $(12) \leftarrow 2a = 12$ ونجد a
2. طول المحور الصغير / مثلاً $(16) \leftarrow 2b = 16$ ونجد b
3. البعد بين البؤرتين / مثلاً $(8) \leftarrow 2c = 8$ ونجد c

مثال 1

جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه $F_1(3,0)$, $F_2(-3,0)$ ورأساه النقطتان $V_1(5,0)$, $V_2(-5,0)$

(السينات) $c = 3 \rightarrow (c)$ (البؤرة)

(السينات) $a = 5 \rightarrow (a)$ (الرأس)

نجد b من القانون العام

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

$$b = \sqrt{(5)^2 - (3)^3}$$

$$b = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16}$$

$$b = 4$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

مثال 2

جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه $(5,0)$, $(-5,0)$ وطول محوره الكبير = 12 وحدة.

(السينات) $c = 5 \rightarrow (c)$ (البؤرة)

$$[2a = 12] \div 2 \Rightarrow a = 6$$

نجد b من القانون العام

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

$$b = \sqrt{(6)^2 - (5)^3}$$

$$b = \sqrt{36 - 25}$$

$$b = \sqrt{11} \Rightarrow b^2 = 11$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{11} = 1}$$

مثال 3 جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل والمسافة بين البؤرتين (8) وحدات ونصف طول محوره الصغير يساوي (3) وحدات .

المسافة بين البؤرتين $= 2c$

$$\left[2c = 8\right] \div 2$$

$$c = 4$$

$$\frac{1}{2}(2b) = 3 \Rightarrow b = 3$$

$\frac{1}{2}$ ← نصف ، $(2b)$ ← محوره الصغير

نجد a من القانون العام

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$a^2 = 3^2 + 4^2$$

$$a^2 = 9 + 16 \Rightarrow a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$$

لم يحدد موقع البؤرة

السينات

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

أو

الصادات

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$$

ثالثاً إذا أعطى المساحة او المحيط أو الاختلاف المركزي فهذا يجعلك تفكر بهذه القوانين وذلك لايجاد مجهول إذا السؤال مباشر أو لايجاد علاقة من هذه القوانين تساعد في الحل .

مثال 4 جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل والاختلاف المركزي $\left(\frac{1}{2}\right)$ وطول محوره الصغير (12) وحدة .

طول محوره الصغير $(2b) \Rightarrow [2b = 12] \div 2$

$b = 6$

$e = \frac{c}{a}$

$\frac{1}{2} = \frac{c}{a} \Rightarrow a = 2c$ ....(1)

$a^2 = b^2 + c^2$

$(2c)^2 = (6)^2 + c^2$

$4c^2 = 36 + c^2 \Rightarrow 4c^2 - c^2 = 36$

$[3c^2 = 36] \div 3 \Rightarrow c^2 = 12 \Rightarrow c = 2\sqrt{3}$

$a = 2c \Rightarrow a = 2(2\sqrt{3}) \Rightarrow a = 4\sqrt{3}$

لم يتم تحديد موقع البؤرة ولها احتمالين :

أولاً : على محور السينات

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{48} + \frac{y^2}{36} = 1$

ثانياً : على محور الصادات

$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{48} = 1$

مثال 5 جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه تنتميان لمحور السينات ومركزه نقطة الأصل ومساحته منطقته 7π وحدة مربعة ومحيطه يساوي 10π وحدة .

$A = a.b\pi \Rightarrow [7\pi = a.b\pi] \div b$

$a = \frac{7}{b}$ .... (1)

$p = 2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \Rightarrow \left[10\pi = 2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\right] \div 2\pi$

$5 = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \overset{\text{بالتربيع}}{\Rightarrow} \left[25 = \frac{a^2+b^2}{2}\right] \times 2$

$50 = a^2 + b^2$ .... (2)

$50 = \left(\frac{7}{b}\right)^2 + b^2 \Rightarrow \left[50 = \frac{49}{b^2} + b^2\right].b^2$

$50b^2 = 49 + b^4 \Rightarrow b^4 - 50b^2 + 49 = 0$

$(b^2 - 1)(b^2 - 49) = 0$

2011 - د (2)

$b^2 - 1 = 0 \Rightarrow b = 1$

2015 - د (4) / رصافة

$b^2 - 49 = 0 \Rightarrow b = 7$

2018 - د (1) / احيائي

عندما b=1 $\quad a = \frac{7}{b} = \frac{7}{1} \Rightarrow a = 7$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{1} = 1$

عندما b=7 $\quad a = \frac{7}{b} = \frac{7}{7} \Rightarrow a = 1$

هذا الاحتمال يهمل لأن قيمة a هنا اصغر من قيمة b وهذا غير ممكن .

رابعاً العلاقة بين القطعين المكافئ والناقص: عندما يكون السؤال يحوي قطع مكافئ وناقص يجب ترجمة الكلام وتحويله الى معادلة رياضية كما موضح في الامثلة التوضيحية أدناه:

جد معادلة القطع الناقص الذي احدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ ... الخ .

$$c_{\text{ناقص}} = P_{\text{مكافئ}}$$

جد معادلة القطع الناقص الذي احد راسيه هو بؤرة القطع المكافئ ... الخ .

$$a_{\text{ناقص}} = P_{\text{مكافئ}}$$

جد معادلة القطع الناقص الذي احدى بؤرتيه تنطبق على بؤرة القطع المكافئ ... الخ .

$$c_{\text{ناقص}} = P_{\text{مكافئ}}$$

مثال 6 جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وإحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $y^2 - 12x = 0$ وطول محوره الصغير يساوي (10) وحدات .

$$\text{طول محوره الصغير} = 2b \Rightarrow [2b = 10] \div 2$$
$$b = 5$$

القطع المكافئ: دائماً نجد P من معادلة القطع المكافئ .

$$y^2 - 12x = 0 \Rightarrow y^2 = 12x$$
$$y^2 = 4Px$$
$$[4P = 12] \div 4 \Rightarrow P = 3$$
$$F(3, 0)$$

إحدى بؤرتيه — هي — بؤرة القطع المكافئ

$$c_{\text{ناقص}} = P_{\text{مكافئ}}$$

$$c = 3 \quad , \quad b = 5 \quad , \quad a = ?$$

من القانون العام نجد a

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = (5)^2 + (3)^2$$
$$a^2 = 25 + 9 \Rightarrow a^2 = 34$$

بؤرتا القطع الناقص على محور السينات لأن بؤرة القطع المكافئ على السينات .

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{34} + \frac{y^2}{25} = 1$$

خامساً تحويل العبارات الى علاقات رياضية (معادلات):

1. مجموع طولي محوريه ← $2a+2b$
2. مجموع مربعي طولي محوريه ← $(2a)^2+(2b)^2$
3. الفرق بين طولي محوريه ← إذا كان الفرق (+) $2a-2b$ ، إذا كان الفرق (−) $2b-2a$

مثال 7 جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه على محور السينات والمسافة بينهما (6) وحدات والفرق بين طولي محوريه (2).

$[2c=6]\div \Rightarrow c=3$

$[2a-2b=2]\div 2 \Rightarrow a-b=1$

$a=1+b$ ....(1)

$a^2=b^2+c^2$

$(1+b)^2=b^2+3^2$

$1+2b+b^2=b^2+9 \Rightarrow 2b=9-1$

$[2b=8]\div 2$

$b=4$ (تعوض في معادلة رقم (1))

$a=1+b$

2005 - د (1)

$a=1+4 \Rightarrow a=5$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$$

مثال 8 جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وإحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ ($x^2=24y$) ومجموع طولي محوريه (36) وحدة.

* نستفد من معادلة المكافئ لنجد P

$x^2=24y$

$x^2=4Py \Rightarrow [4P=24]\div 4$

$P=6 \Rightarrow F(0,6)$

إحدى بؤرتيه	هي	بؤرة القطع المكافئ
c ناقص	$=$	P مكافئ

$\Rightarrow c=6$

مجموع طولي محوريه ← $[2a+2b=36]\div 2$

$a+b=18 \Rightarrow b=18-a$ ....(1)

$a^2=b^2+c^2$

2012 / تمهيدي

2017 - د (2) / احيائي/خارج

2017 - د (2) / تطبيقي/موصل

2019 - تمهيدي/احيائي

$a^2=(18-a)^2+(6)^2$

مربع حدانية

$a^2=324-36a+a^2+36 \Rightarrow [36a=360]\div 36$

$a=10$

نعوض a في المعادلة (1)

$b=18-a$

$b=18-10 \Rightarrow b=8$

بؤرة الناقص على محور الصادات لذلك نستخدم معادلة الصادات.

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{100}=1$$

سادساً إذا أعطى في السؤال نقطة (x, y) يمر بها المنحني أو تنتمي الى المنحني نستفيد من معادلة القطع القياسية $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ أو $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ حيث يتم تعويض النقطة في المعادلة القياسية ولكن بشرط لا تحوي النقطة احداثي صفر.

مثال 9 جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وإحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ الذي معادلته $y^2+8x=0$ علماً ان القطع الناقص يمر بالنقطة $(\sqrt{3}\ ,\ 2\sqrt{3})$.

* نستفد من معادلة المكافئ لنجد P

$y^2=-8x$

$y^2=-4Px \Rightarrow [4P=8]\div 4 \Rightarrow P=2$

$F(-2,0)$

إحدى بؤرتيه	هي	بؤرة القطع المكافئ
$c_{\text{ناقص}}$	$=$	$P_{\text{مكافئ}}$

$c=2$

أنظر الى النقطة $(2\sqrt{3}, \sqrt{3})$ نستفيد من معادلة القطع الناقص القياسية.

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{(2\sqrt{3})^2}{a^2}+\frac{(\sqrt{3})^2}{b^2}=1$

$\left[\frac{12}{a^2}+\frac{3}{b^2}=1\right].a^2\ .b^2$

$12b^2+3a^2=a^2\ .b^2$ ....(1)

$a^2=b^2+c^2$

$a^2=b^2+2^2 \Rightarrow a^2=b^2+4$ ....(2)

بتعويض معادلة (2) في معادلة (1)

$12b^2+3\underbrace{(b^2+4)}_{a^2}=\underbrace{(b^2+4)}_{a^2}.b^2$

$\underbrace{12b^2+3b^2}_{\text{جمع}}+12=b^4+4b^2$

$15b^2+12=b^4+4b^2$

$0=b^4+\underbrace{4b^2-15b^2}_{\text{طرح}}-12$

$b^4-11b^2-12=0$

$(b^2+1)(b^2-12)=0$

أما $b^2+1=0$ يُهمل $\notin R$

أو $b^2-12=0 \Rightarrow b^2=12$

نعوض في معادلة (2)

$a^2=b^2+4$ ....(2)

$a^2=12+4 \Rightarrow a^2=16$

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$

2000 - د (1) | 2014 - د (2) | 2017 - تمهيدي / احيائي | 2017 - تمهيدي / تطبيقي | 2017 - د (3) / موصل | 2018 - د (1) / تطبيقي / خارج | 2018 - د (2) / احيائي / خارج

مثال 10 جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه على محور السينات ويمر بالنقطتين $(3,4)$, $(6,2)$.

(البؤرة على محور السينات) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

نعوض $(3,4)$ (x,y)

$$\frac{(3)^2}{a^2}+\frac{(4)^2}{b^2}=1$$

$$\left[\frac{9}{a^2}+\frac{16}{b^2}=1\right].a^2\ .b^2$$

$$9b^2+16a^2=a^2b^2 \quad ....(1)$$

ونعوض $(6,2)$ (x,y)

$$\frac{(6)^2}{a^2}+\frac{(2)^2}{b^2}=1$$

$$\left[\frac{36}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1\right].a^2\ .b^2$$

$$36b^2+4a^2=a^2\ .b^2 \quad ....(2)$$

نضرب المعادلة (1) في 4 لنساوي معامل b^2 ونحل بالحذف (الطرح)

$$36b^2+64a^2=4a^2b^2 \quad ....(3)$$

نحل معادلة (2) و (3) آنياً

$$36b^2+64a^2=4a^2b^2$$

$$\pm 36b^2\pm 4a^2=\pm a^2b^2$$

$$\left[60a^2=3a^2b^2\right]\div a^2 \qquad a^2\neq 0$$

$$\left[60=3b^2\right]\div 3 \Rightarrow b^2=20$$

نعوض في معادلة (1)

$$9b^2+16a^2=a^2b^2$$

$$9(20)+16a^2=a^2\ (20)$$

$$180+16a^2=20a^2$$

$$180=20a^2-16a^2 \Rightarrow \left[180=4a^2\right]\div 4$$

$$a^2=45$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{20}=1$$

2016 - د (1) / خارج

سابعاً عبارات (يمر - يمس) :

1. إذا ذكر عبارة يمر بنقطة $(x,0)$ أو $(0,y)$ شرط ان يكون اما $x=0$ أو $y=0$ في النقطة . فهذا يعني أما (a) أو (b)

سوف يمثل اما (a) أو (b)

2. كل يمس سوف يمثل اما (a) أو (b)

* جد معادلة القطع الناقص الذي يمس دليل القطع المكافئ . . . الخ .

أما a أو b

P ← سوف يمثل اما (a) أو (b)

ثامناً إذا ذكر عبارة نقطة التقاطع مع محور السينات أو الصادات :

نقطة التقاطع مع محور السينات $y=0$ ونقطة التقاطع مع محور الصادات $x=0$ حيث تعوض بمعادلة المنحني أو معادلة المستقيم المعطاة في السؤال .

مثال 11

جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه نقطتا تقاطع المنحني $x^2+y^2-3x=16$ مع محور الصادات ويمس دليل القطع المكافئ $(y^2=12x)$.

نقطة التقاطع مع محور الصادات $x=0$

$x^2+y^2-3x=16$

$(0)^2+y^2-3(0)=16 \Rightarrow y^2=16$ بالجذر

$y=\mp 4$

$F_1(0,4) \quad F_2(0,-4) \rightarrow c=4$ (صادات)

استفد من معادلة القطع المكافئ لنجد P

$y^2=12x$

$y^2=4Px \Rightarrow [4P=12]\div 4$

$P=3$ (سينات)

كلمة يمس يعني أما a أو b

وهنا $\left(\underset{\text{ناقص}}{b}=\underset{\text{مكافئ}}{P}\right)$ لأن البؤرة صادات والمكافئ سينات والذي يخالف البؤرة هو (b)

$b=3$

نجد a من القانون العام

2014 - د (2)/خارج

2017 - د (3)/تطبيقي موصل

$a^2=b^2+c^2$

$a^2=3^2+4^2$

$a^2=9+16 \Rightarrow a^2=25 \Rightarrow a=5$

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$$

تاسعاً إذا ذكر عبارة يقطع فهي على نوعين :

النوع الأول يقطع محور السينات عند $x = \pm$ رقم أو يقطع محور الصادات عند $y = \pm$ رقم

سوف يمثل اما (a) أو (b) ويؤخذ موجب

النوع الثاني إذا ذكر في السؤال ان القطع الناقص يقطع منحني ففي هذه الحالة نتبع ما يلي :

- **a** نعوض الاحداثي المعطى في السؤال بمعادلة المنحني .
- **b** بعد التعويض يصبح لدينا احداثي كامل من x و y .
- **c** تعوض هذه النقطة بمعادلة القطع القياسية ونكمل الحل .

تابعة للمثال (13)

مثال 12 جد المعادلة القياسية للقطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه $(0, \mp 2)$ ويتقاطع مع محور السينات عند $x = \mp 4$

2017 - د (1)/تطبيقي/موصل

(الصادات) $c = 2$ ← (c) البؤرة

ملاحظة $x = 4$ تُعتبر (b) قطب لأن البؤرة على محور الصادات والذي يعاكس البؤرة هو القطب لذلك $(b = 4)$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$a^2 = (4)^2 + (2)^2 \Rightarrow a^2 = 16 + 4 \Rightarrow a^2 = 20$$

معادلة الصادات $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{20} = 1$

يا فاتناً بالحبِّ قلبي قد هَلَك
هل أنتَ من حوّا وآدمَ أم مَلَك
عيني إذا نظرت لحُسنِكَ سبّحت
سبحانَ من خلقَ الجمالَ وجمّلك

مثال 13 جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه على محور السينات ومركزه نقطة الأصل وطول محوره الكبير ضعف طول محوره الصغير ويقطع القطع المكافئ $(y^2 + 8x = 0)$ عند النقطة التي احداثيها السيني (-2).

2013 - د (1)/ خارج

يقطع القطع عند النقطة $x = -2$ نُعوضه قيمة x في معادلة القطع المكافئ

$$y^2 + 8(-2) = 0 \Rightarrow y^2 = 16$$ بالجذر

$$y = \pm 4$$

$$(-2, 4) \quad , \quad (-2, -4)$$

راجع السؤال (7) في الاسئلة الوزارية

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

نعوض إحدى النقطتين ولتكن $(-2, 4)$

$$\frac{(-2)^2}{a^2} + \frac{(4)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{4}{(2b)^2} + \frac{16}{b^2} = 1$$

ونعوض أيضاً $a = 2b$

$$\frac{4}{4b^2} + \frac{16}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{1}{b^2} + \frac{16}{b^2} = 1$$

$$\frac{17}{b^2} = \frac{1}{1}$$

$$b^2 = 17 \Rightarrow b = \sqrt{17}$$

$$a = 2b \Rightarrow a = 2\sqrt{17} \Rightarrow a^2 = 68$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{68} + \frac{y^2}{17}$$

$$[2a = 2(2b)] \div 2$$

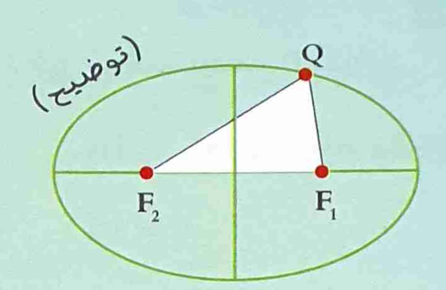
ضعف محوره الصغير = محوره الكبير

$$a = 2b \,.........(1)$$

ملاحظة ومثال إذا أعطى محيط المثلث بين النقاط QF_1F_2 أي المحيط للمثلث المتكون من البؤرتين F_1 , F_2 ونقطة ثالثة على القطع يكون الحل كما يلي :

$$QF_1F_2 = QF_1 + QF_2 + F_1F_2$$

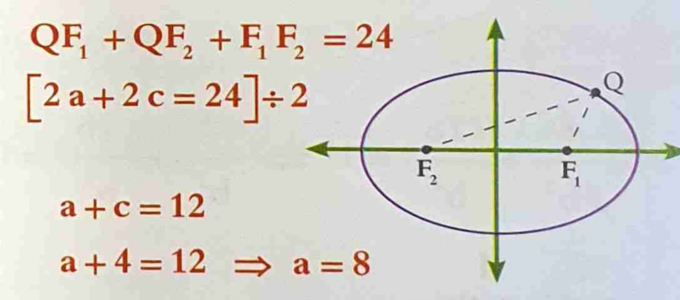
$$\text{محيط المثلث} = 2a + 2c$$



مثال 14 جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتيه $F_1(4,0)$, $F_2(-4,0)$ والنقطة Q تنتمي للقطع الناقص بحيث ان محيط المثلث QF_1F_2 يساوي (24) وحدة .

$$QF_1 + QF_2 + F_1F_2 = 24$$

$$[2a + 2c = 24] \div 2$$



$$a + c = 12$$

$$a + 4 = 12 \Rightarrow a = 8$$

نجد b من القانون العام

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

$$b = \sqrt{64 - 16}$$

$$b = \sqrt{48} \Rightarrow b^2 = 488$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1}$$

2014 - د (1)

2016 - د (2) / خارج / المحيط =30 بدل 24

الرياضيات

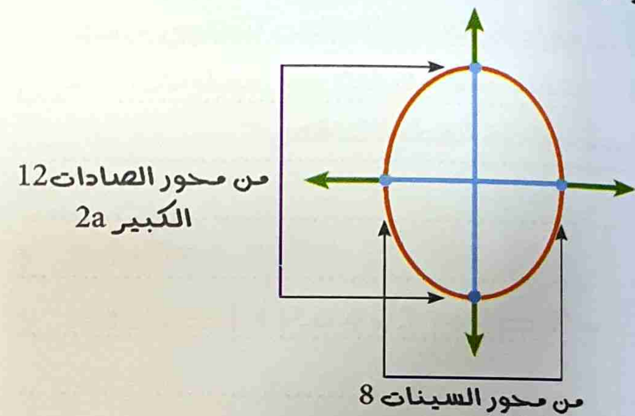
....

....

....

ملاحظة ومثال إذا قال في السؤال ان القطع الناقص يقطع من محور (جزءاً) طوله (رقم) فأن هذا الجزء المقطوع أما $2a$ أو $2b$

مثال 15 جد معادلة القطع الناقص الذي يقطع من محور السينات جزءاً طوله (8) وحدات ومن محور الصادات جزءاً طوله (12) وحدة. ثم جد المسافة بين البؤرتين والمساحة والمحيط.



$2b = 8 \Rightarrow b = 4$

$2a = 12 \Rightarrow a = 6$

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} = 1$$

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2}$

$c = \sqrt{36 - 16} = \sqrt{20} \Rightarrow c = 2\sqrt{5}$

$2c = 2\ (2\sqrt{5}) = 4\sqrt{5}$ unit

$A = ab\pi = 6\ (4)\ \pi = 24\pi$ unit^2

$$p = 2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = 2\pi\sqrt{\frac{36+16}{2}}$$

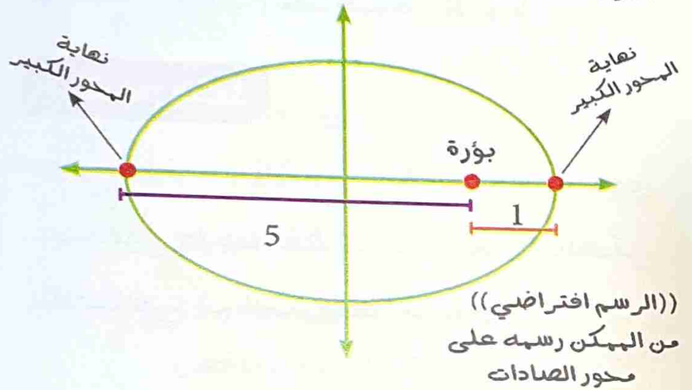
$p = 2\sqrt{26}\ \pi$ unit

ملاحظة ومثال عندما يعطي في السؤال بعدي احدى البؤرتين عن الرأسين بشكل عددين فأننا نستخدم المجموع والفرق.

مجموع البعدين $= 2a$

حاصل طرح البعدين $= 2c$

مثال 16 جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل واحدى بؤرتيه تبعد عن نهايتي محوره الكبير بالعددين $1,5$ على الترتيب.



مجموع البعدين $5 + 1 = 2a \Rightarrow [2a = 6] \div 2$

$a = 3$

حاصل طرح البعدين $5 - 1 = 2c \Rightarrow [2c = 4] \div 2$

$c = 2$

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2}$

$b = \sqrt{9 - 4} \Rightarrow b = \sqrt{5}$

لم يحدد موقع البؤرة لذلك ناخذ احتمالين

السينات: $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$$

الصادات: $$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$$

ملاحظة ومثال

إذا أعطى في السؤال معادلة قطع ناقص تحتوي على ثابت مجهول $h, k \in R$

الحالة الأولى: إذا كانت المعادلة تحتوي مجهول واحد فقط نستفاد من معادلة القطع المعطاة في السؤال لنجد a^2 او b^2 ونستخدم القانون العام $a^2 = b^2 + c^2$

مثال 17 لتكن $kx^2 + 4y^2 = 36$ معادلة قطع ناقص مركزه نقطة الأصل وإحدى بؤرتيه $(\sqrt{3}, 0)$ جد قيمة $k \in R$.

توضيح فقط

المعادلة $kx^2 + 4y^2 = 36$ تحوي مجهول واحد فقط لذلك نجعلها بالشكل القياسي ثم نجد منها أما a^2 أو b^2

$$\left[kx^2 + 4y^2 = 36\right] \div 36$$

$$\frac{kx^2}{36} + \frac{4y^2}{36} = \frac{36}{36} \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{36}{k}} + \frac{y^2}{9} = 1$$

لأن البؤرة على محور السينات

إذن $\frac{36}{k} = a^2 \leftarrow$, $b^2 = 9$, $c = \sqrt{3}$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$\frac{36}{k} = 9 + (\sqrt{3})^2$$

$$\frac{36}{k} = 9 + 3 \Rightarrow \frac{36}{k} = 12 \Rightarrow k = \frac{36}{12} \Rightarrow \boxed{k = 3}$$

الحالة الثانية : إذا كانت معادلة القطع الناقص المعطاة في السؤال تحوي مجهولين فلا نستفيد منها بشيء وانما نحل السؤال وكأن المطلوب هو معادلة القطع الناقص وبعدها نجعل معادلة المجاهيل بالشكل القياسي وبالمقارنة مع المعادلة التي وجدناها سوف نستخرج المجاهيل

مثال 18

قطع ناقص معادلته $hx^2 + ky^2 = 36$ مركزه نقطة الأصل ومجموع مربعي طولي محوريه يساوي (60) وإحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ الذي معادلته $y^2 = 4\sqrt{3}x$ جد قيمة $h, k \in R$.

لأن معادلة القطع الناقص تحتوي مجهولين لا نستفاد منها لذلك من معلومات السؤال نجد معادلة القطع الناقص.

$y^2 = 4\sqrt{3}x$

$y^2 = 4Px \Rightarrow [4P = 4\sqrt{3}] \div 4 \Rightarrow P = \sqrt{3}$

$F(\sqrt{3}, 0)$

$\underset{\text{مكافئ}}{P} = \underset{\text{ناقص}}{c} \Rightarrow c = \sqrt{3}$

مربعي

$(2a)^2 + (2b)^2 = 60$

مجموع

طولي محوريه

$[4a^2 + 4b^2 = 60] \div 4$

$a^2 + b^2 = 15 \Rightarrow \boxed{a^2 = 15 - b^2}$ ....(1)

تعويض

$a^2 = b^2 + c^2$

$15 - b^2 = b^2 + (\sqrt{3})^2$

1998 - د (1)

2017 - د (2)/تطبيقي/خارج

2017 - د (2)/احيائي

$15 - b^2 = b^2 + 3$

$15 - 3 = b^2 + b^2 \Rightarrow [12 = 2b^2] \div 2$

$b^2 = 6$ نعوض في معادلة (1)

$a^2 = 15 - b^2$

$a^2 = 15 - 6 \Rightarrow a^2 = 9$

الأن نجد معادلة القطع الناقص

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{6} = 1$

بعد ذلك نجعل معادلة المجاهيل بالشكل القياسي ثم نقارنها

$[hx^2 + ky^2 = 36] \div 36 \Rightarrow \frac{hx^2}{36} + \frac{ky^2}{36} = \frac{36}{36}$

$\frac{x^2}{\frac{36}{h}} + \frac{y^2}{\frac{36}{k}} = 1 \xrightarrow{\text{بالمقارنة}} \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{6} = 1$

$\frac{36}{h} = 9 \Rightarrow h = \frac{36}{9} \Rightarrow \boxed{h = 4}$

$\frac{36}{k} = 6 \Rightarrow k = \frac{36}{6} \Rightarrow \boxed{k = 6}$

إيجاد معادلة القطع الناقص باستخدام التعريف

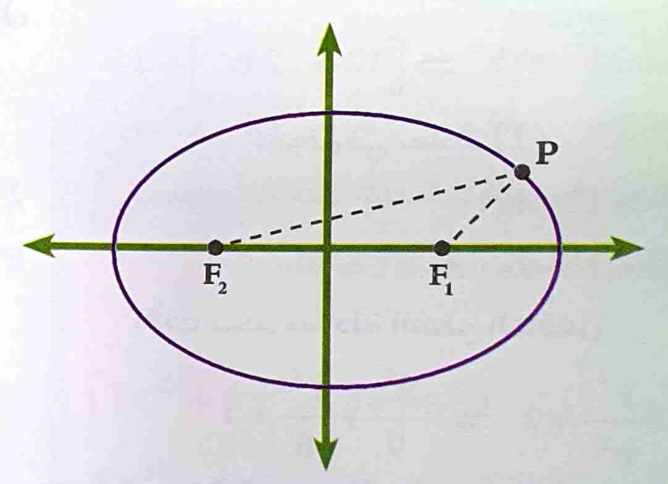
هناك عدة خطوات لحل السؤال

القانون ← التعويض ← التحويل ← التربيع ← الارجاع ← التربيع ثم تصفية الطرفين

التحويل: تحويل أحد الجذرين إلى الطرف الأيمن

الارجاع: ارجاع الجذر الى الطرف الأيسر





$$PF_1 + PF_2 = 2a$$

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} + \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = 2a$$

توضيح

$P(x, y)$ (x_2, y_2)

$PF_1 \rightarrow F_1 \; (C, 0)$ (x_1, y_1)

$PF_2 \rightarrow F_2 \; (-C, 0)$ (x_1, y_1)

مثال 19 باستخدام التعريف جد معادلة القطع الناقص اذا علم :

a- بؤرتاه النقطتان $(0\ ,\ \pm 2)$ ورأساه $(0\ ,\ \pm 3)$ ومركزه نقطة الأصل .

$$PF_1 + PF_2 = 2a$$

القانون $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} + \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = 2a$

التعويض $\sqrt{(x-0)^2 + (y-2)^2} + \sqrt{(x-0)^2 + (y+2)^2} = 6$

التحويل (تحويل الجذر للطرف الاخر)

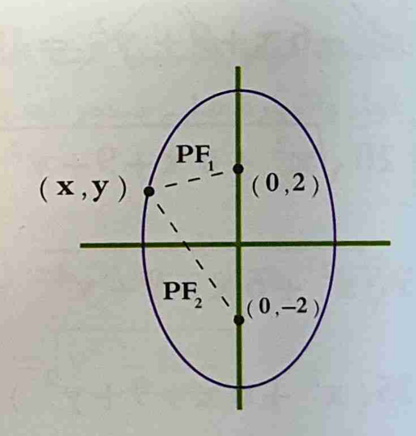
وبتربيع الطرفين $\sqrt{x^2 + y^2 - 4y + 4} = 6 - \sqrt{x^2 + y^2 + 4y + 4}$

فتح التربيع داخل الجذر اعلاه — فتح التربيع داخل الجذر اعلاه

$$\cancel{x^2} + \cancel{y^2} - 4y + \cancel{4} = 36 - 12\sqrt{x^2 + y^2 + 4y + 4} + \cancel{x^2} + \cancel{y^2} + 4y + \cancel{4}$$

$$\left[12\sqrt{x^2 + y^2 + 4y + 4} = 36 + 8y\right] \div 4$$

وبتربيع الطرفين $3\sqrt{x^2 + y^2 + 4y + 4} = 9 + 2y$



$$9(x^2 + y^2 + 4y + 4) = 81 + 36y + 4y^2$$

$$9x^2 + 9y^2 + \cancel{36y} + 36 = 81 + \cancel{36y} + 4y^2$$

$$9x^2 + 9y^2 - 4y^2 = 81 - 36$$

$$\left[9x^2 + 5y^2 = 45\right] \div 45$$

معادلة القطع الناقص $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$

b- باستخدام التعريف جد معادلة القطع الناقص اذا علمت ان المسافة بين بؤرتيه 6 وحدات والعدد الثابت =10 والبؤرتان تقعان على محور السينات :.

$$PF_1 + PF_2 = 2a$$

القانون $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} + \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = 2a$

التعويض $\sqrt{(x-3)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x+3)^2 + (y-0)^2} = 10$

التحويل (تحويل الجذر للطرف الاخر)

وبتربيع الطرفين $\sqrt{x^2 - 6x + 9 + y^2} = 10 - \sqrt{x^2 + 6x + 9 + y^2}$

فتح التربيع داخل الجذر اعلاه ... فتح التربيع داخل الجذر اعلاه

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 = 100 - 20\sqrt{x^2 + 6x + 9 + y^2} + x^2 + 6x + 9 + y^2$$

وبتربيع الطرفين $\left[20\sqrt{x^2 + 6x + 9 + y^2} = 100 + 12x\right] \div 4$

$$5\sqrt{x^2 + 6x + 9 + y^2} = 25 + 3x$$

$$25(x^2 + 6x + 9 + y^2) = 625 + 150x + 9x^2$$

$$25x^2 + 150x + 225 + 25y^2 = 625 + 150x + 9x^2$$

$$25x^2 + 25y^2 - 9x^2 = 625 - 225$$

$$\left[16x^2 + 25y^2 = 400\right] \div 400$$

معادلة القطع الناقص $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

توضيح

$2c = 6 \Rightarrow c = 3$

العدد الثابت $2a = 10$

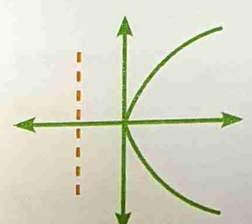
$P(x, y)$ (x_2, y_2) → $F_1 (3, 0)$ (x_1, y_1)

$P(x, y)$ → $F_2 (-3, 0)$ (x_1, y_1)

الاسئلة الوزارية الخاصة بالقطع الناقص والربط بين القطعين المكافئ والناقص

سؤال 1 النقطة $\left(\frac{1}{3},2\right)$ تنتمي الى القطع المكافئ الذي راسه نقطة الاصل وبؤرته تنتمي الى محور السينات والتي هي احدى بؤرتي القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل والنسبة بين طولي محوريه $\left(\frac{5}{4}\right)$ جد معادلة القطعين المكافئ والناقص.

القطع المكافئ :



الفتحة نحو اليمين لأن النقطة في الربع الأول والبؤرة على محور السينات .

$$y^2 = 4Px$$

$$(2)^2 = 4P\left(\frac{1}{3}\right) \Rightarrow 4 = \frac{4P}{3} \Rightarrow P = 3$$

$$y^2 = 4(3)x \Rightarrow \boxed{y^2 = 12x}$$

القطع الناقص:

$$\underset{\text{مكافئ}}{P} = \underset{\text{ناقص}}{C}$$

1999 - د (2)

2017 - د (2)/احيائي/خارج

$$\frac{\not{2}a}{\not{2}b} = \frac{5}{4} \Rightarrow [4a = 5b] \div 4$$

$$a = \frac{5}{4}b \ldots\ldots(1)$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$\left(\frac{5}{4}b\right)^2 = b^2 + (3)^3$$

$$\left[\frac{25}{16}b^2 = b^2 + 9\right].\ 16$$

$$25b^2 = 16b^2 + 144$$

$$25b^2 - 16b^2 = 144$$

$$[9b^2 = 144] \div 9 \Rightarrow b^2 = 16 \Rightarrow b = 4$$

$a = \frac{5}{4}b$ نعوض في معادلة (1)

$$a = \frac{5}{\not{4}}(\not{4}) \Rightarrow a = 5$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1}$$

سؤال 2 جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه تنتمي لمحور الصادات ومساحته (32π) وحدة مساحة والنسبة بين طولي محوريه كنسبة $\frac{1}{2}$.

2015 - د (2)

$$\frac{\not{2}b}{\not{2}a} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 2b \ldots\ldots(1)$$

$A = a.b\pi$ هنا (1) نعوض معادلة

$$32\not{\pi} = a.b\not{\pi}$$

$$32 = (2b)(b) \Rightarrow [2b^2 = 32] \div 2$$

$b^2 = 16$ بالجذر

$b = 4$ نعوض معادلة (1)

$$a = 2(b) = 2(4) \Rightarrow a = 8$$

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{64} = 1$$

سؤال 3 لتكن $y^2+12x=0$, $y^2-12x=0$ معادلتي قطعين مكافئين جد بؤرة كل منهما ومعادلة دليله ثم جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه هما بؤرتي القطعين المكافئين وطول محوره الصغير يساوي (10) وحدات طول.

2005 - د (2)

لقطع المكافئ :

$$y^2-12x=0$$

$$y^2=12x$$

$$y^2=4Px \Rightarrow [4P=12]\div 4 \Rightarrow P=3$$

البؤرة $F(3,0)$

معادلة الدليل $x=-3$

$$y^2+12x=0$$

$$y^2=-12x$$

$$y^2=4Px \Rightarrow [4P=12]\div 4 \Rightarrow P=3$$

لبؤرة $F(-3,0)$

معادلة الدليل $x=+3$

القطع الناقص: $c_{\text{مكافئ}} = P_{\text{مكافئ}}$

بؤرتاه هما $F_1(3,0)$, $F_2(-3,0)$

$$\therefore \ c=3$$

$$[2b=10]\div 2 \Rightarrow b=5$$

$$a^2=b^2+c^2$$

$$a^2=5^2+3^2 \Rightarrow a^2=25+9$$

$$a^2=34$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{34}+\frac{y^2}{25}=1$$

سؤال 4 جد معادلة القطع الناقص الذي إحدى بؤرتيه هي بؤرته القطع المكافئ $y^2=-8x$ وطول محوره الكبير ثلاث امثال طول محوره الصغير.

2010 تمهيدي

$$y^2=-8x$$

$$y^2=-4Px \Rightarrow [4P=8]\div 4 \Rightarrow P=2$$

$F(-2,0)$ ((سينات))

$$[2a=3(2b)]\div 2$$

$$a=3b......(1)$$

$$a^2=b^2+c^2$$

$$(3b)^2=b^2+4 \Rightarrow 9b^2=b^2+4$$

$$9b^2-b^2=4 \Rightarrow [8b^2=4]\div 8$$

$$b^2=\frac{1}{2} \Rightarrow b=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$a=3b \Rightarrow a=3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$a=\frac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow a^2=\frac{9}{2}$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{9}{2}}+\frac{y^2}{\frac{1}{2}}=1$$

سؤال 5 جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل ومحوره على المحورين الاجداثيين ويمر من بؤرة القطع المكافئ $y^2 - 16x = 0$ ومساحة منطقة القطع الناقص 20π وحدة مساحة.

2010 - د (1)

$y^2 = 16x$

$y^2 = 4Px \Rightarrow [4P = 16] \div 4 \Rightarrow P = 4$

البؤرة $F(4,0)$

القطع الناقص:

يمر من بؤرة المكافئ $F(4,0)$ ← أما $a = 4$ أو $b = 4$

$A = ab\pi$

$20\pi = a \cdot b\,\pi \Rightarrow 20 = a \cdot b$ ......(1)

يوجد لدينا احتمالين:

الأول: $a = 4$ نعوض بمعادلة (1)

$[20 = 4b] \div 4 \Rightarrow b = 5$

هذا الاحتمال يُهمل لأن فيه a اصغر من b وهذا لايمكن في القطع الناقص.

الثاني: $b = 4$ نعوض بمعادلة (1)

$[20 = 4a] \div 4 \Rightarrow a = 5$

هذا الاحتمال صح لأن a أكبر من b.

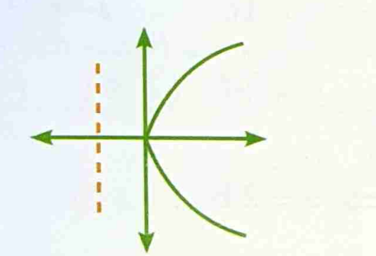
$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1}$$

ملاحظة

القطع على محور الصادات لأن البؤرة $F(4,0)$ التي مر بها القطع اصبحت b أي انها قطب وبما ان القطب سيني فالقطع صادي لأن البؤرة عكس القطب.

سؤال 6 قطع ناقص راساه $(\pm5, 0)$ وإحدى بؤرتيه هي بؤره القطع المكافئ الذي راسه نقطة الأصل والمار دليله بالنقطة $(-3, 4)$ جد معادلة القطعين المكافئ والناقص.

2012 خارج القطر



القطع المكافئ:

القطعان على محور السينات.

$y^2 = 4Px \qquad P = 3$

معادلة القطع المكافئ $y^2 = 4(3)x \Rightarrow y^2 = 12x$

القطع الناقص:

بؤرة القطع المكافئ والتي هي إحدى بؤرتي الناقص رأساه $(\pm5, 0)$ ← $F(3,0)$

$c = 3 \qquad a = 5 \qquad b = ?$

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2}$

$b = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16}$

$b = 4$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

سؤال 7 جد معادلة القطع الناقص الذي تقع بؤرتاه على محور السينات ومركزه نقطة الأصل والنسبة بين طولي محوريه $2:1$ ويقطع القطع المكافئ $y^2 = 8x$ عند $x = 2$

2013 خارج القطر

$y^2 = 8x$

$y^2 = 8(2) \Rightarrow y^2 = 16$ بالجذر

$y = \mp 4 \quad (2,4) \; , \; (2,-4)$

$\frac{2b}{2a} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 2b \; ....(1)$

لأن لدينا (x, y) نستفيد من معادلة القطع الناقص القياسية.

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ نعوض $(2,4)$

$\frac{(2)^2}{(2b)^2} + \frac{(4)^2}{b^2} = 1$

$\frac{4}{4b^2} + \frac{16}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{1}{b^2} + \frac{16}{b^2} = 1$

$\frac{17}{b^2} = \frac{1}{1} \Rightarrow b^2 = 17$

$b = \sqrt{17} \Rightarrow a = 2b$

$a = 2\sqrt{17} \Rightarrow a^2 = 68$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{68} + \frac{y^2}{17} = 1$

سؤال 8 جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وينطبق محوراه على المحورين الاحداثيين ويقطع من محور السينات جزءاً طوله (8) وحدات ومساحة منطقته 24π وحدة مساحة.

2012 - د (2)

الجزء المقطوع من محور السينات

أما $2a = 8 \Rightarrow a = 4$

أو $2b = 8 \Rightarrow b = 4$

$A = a \, . \, b\pi$

$24\pi = a \, . \, b\pi \Rightarrow a \, . \, b = 24$

نعوض أولاً $a = 4$

$[4b = 24] \div 4 \Rightarrow b = 6$ يُهمل

لأن $b < a$ أصغر

ثم نعوض $b = 4$

$[4a = 24] \div 4 \Rightarrow a = 6 \quad o.k$

$a > b$ أكبر

$a = 6 \; , \; b = 4$

القطع على محور الصادات لأن الجزء المقطوع منه محور السينات اصبح يمثل $(2b)$ أي محور القطب.

$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} = 1$

سؤال 9 جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وبعده البؤري مساوياً بعد بؤرة القطع المكافئ $y^2 + 24x = 0$ عن دليله إذا علمت ان مساحة القطع الناقص تساوي $80\pi cm^2$.

2016 - د (1)

2019 - د (1)/تطبيقي

$$y^2 = -24x$$

$$y^2 = -4Px \Rightarrow [4P = 24] \div 4$$

$$P = 6$$

بعد بين بؤرة القطع المكافئ ودليله = 2P

$$2c = 2P$$

بعد بؤرة القطع المكافئ عن دليله — مساوياً — بعده البؤري

$$\therefore c = P \Rightarrow \boxed{c = 6} \text{ (للناقص)}$$

$$A = a.b\pi$$

$$80\not\pi = a.b\not\pi \Rightarrow b = \frac{80}{a} ....(1)$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

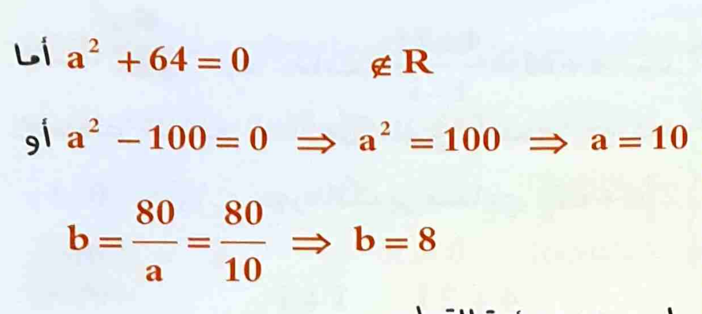
$$a^2 = \left(\frac{80}{a}\right)^2 + (6)^2$$

$$\left[a^2 = \frac{6400}{a^2} + 36\right].a^2$$

$$a^4 = 6400 + 36a^2$$

$$a^4 - 36a^2 - 6400 = 0$$

$$(a^2 + 64)(a^2 - 100) = 0$$



أما $a^2 + 64 = 0 \quad \notin R$

أو $a^2 - 100 = 0 \Rightarrow a^2 = 100 \Rightarrow a = 10$

$$b = \frac{80}{a} = \frac{80}{10} \Rightarrow b = 8$$

لم يحدد بؤرة القطع

إنتبه ! على الرغم ان القطع المكافئ على محور السينات إلا ان لم يحدد موقع البؤرة وانما اطوال فقط .

فقال $2c = 2P$ وهذا لا يعني انهما يقعان على نفس المحور .

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$$

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1$$



سؤال 10

إذا كان $e+id=\frac{4+2i}{1-i}$ جد معادلة القطع الناقص الذي إحدى بؤرتيه $(0,d)$ وطول محوره الكبير يساوي $2\|e+di\|$

2014 نازحين

2016 نازحين

$$e+id=\frac{4+2i}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i}$$

$$e+id=\frac{4+4i+2i-2}{(1)^1+(1)^2}=\frac{2+6i}{2}$$

$$e+di=1+3i \Rightarrow e=1$$

$$d=3$$

احدى بؤرتي القطع الناقص $(0,d)=(0,3)$

$$r=\|e+di\|=\sqrt{e^2+d^2}$$

$$=\sqrt{(1)^2+(3)^2}=\sqrt{10}$$

$$2a=2\sqrt{10} \Rightarrow a=\sqrt{10} \Rightarrow a^2=10$$

$$c=3 \ , \ a=\sqrt{10} \ , \ b=?$$

$$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow b=\sqrt{a^2-c^2}$$

$$b=\sqrt{10-9}=\sqrt{1}$$

$$b=1$$

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{10}=1}$$

سؤال 11

قطع ناقص معادلته $4x^2+2y^2=k$ والبعد بين بؤرتيه $2\sqrt{3}$ وحدة طول جد قيمة k.

2008 - د (1)

$$\left[4x^2+2y^2=k\right]\div k$$

$$\frac{4x^2}{k}+\frac{2y^2}{k}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{k}{4}}+\frac{y^2}{\frac{k}{2}}=1$$

$$\left[2c=2\sqrt{3}\right]\div 2 \Rightarrow \boxed{c=\sqrt{3}}$$

$\frac{k}{2}$ أكبر من $\frac{k}{4}$ ((كلما صغر المقام كبر الكسر))

((القطع صادي)) لأن الكبير $\frac{k}{2}$ يقع على محور (y)

$$a^2=\frac{k}{2},\ b^2=\frac{k}{4},\ c=\sqrt{3}$$

$$a^2=b^2+c^2$$

$$\frac{k}{2}=\frac{k}{4}+\left(\sqrt{3}\right)^2$$

$$\left[\frac{k}{2}=\frac{k}{4}+3\right].4$$

$$2k=k+12$$

$$2k-k=12 \Rightarrow \boxed{k=12}$$

سؤال 12 إذا كان $z = 3x^2 + ky^2$ معادلة قطع ناقص بؤرتاه تنتميان الى محور السينات ويمر بنقطة تقاطع المستقيم $2x + y = \sqrt{3}$ مع المحور الصادي علماً ان مساحة القطع $2\sqrt{3}\pi$ وحدة مساحة جد $k, Z \in R$.

2010 - د (2)

((نقطة التقاطع مع محور الصادات)) $x = 0$ $\quad 2x + y = \sqrt{3}$

$2(0) + y = \sqrt{3}$

$y = \sqrt{3}$

هذه النقطة تمثل القطب لانها على محور $y \rightarrow (0, \sqrt{3})$

والبؤرة على محور X اي ان $b = \sqrt{3}$

$$A = a \cdot b\pi \Rightarrow 2\sqrt{3}\pi = a(\sqrt{3})\pi \Rightarrow a = 2$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$$

$$[ky^2 + 3x^2 = Z] \div Z \Rightarrow \frac{3x^2}{Z} + \frac{ky^2}{Z} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{Z}{3}} + \frac{y^2}{\frac{Z}{k}}$$

$$a^2 = \frac{Z}{3} \qquad \frac{Z}{k} = b^2$$

$$\frac{Z}{3} = a^2 \Rightarrow \frac{Z}{3} = 4 \Rightarrow Z = 12$$

$$\frac{Z}{k} = b^2 \Rightarrow \frac{12}{k} = 3 \Rightarrow k = \frac{12}{3} \Rightarrow k = 4$$

ملاحظة : إذا جاء سؤال عبارة عن نصف قطع ناقص وكان معلوم المسافة بين القاعدتين والارتفاع نتبع ما يأتي :

1- نقسم البعد بين القاعدتين على (2) ونجد الناتج

2- إذا كان الارتفاع اصغر من ناتج القسمة (القطع سينات) واذا كان الارتفاع أكبر من الناتج (القطع صادات) .

3- نستخدم المعادلة القياسية المناسبة حسب القطع ونعوض a،b ثم نجد المطلوب .

انتبه الارتفاع عند نقطة معينة معناها ان المطلوب هو (y) .

سؤال 13 جسر على شكل نصف قطع ناقص المسافة بين نهايتي قاعدتيه (24m) واعلى ارتفاع للجسر (9m) احسب ارتفاع الجسر عند النقطة التي تبعد 6m من بداية احدى قاعدتيه

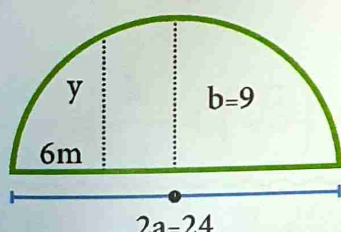
2014 - تمهيدي

$\div 2$ [المسافة بين القاعدتين = 24]

الناتج ← 12

الأرتفاع ← 9

الارتفاع اصغر من الناتج ← سينات



$2a = 24 \Rightarrow \boxed{a = 12}$

$\boxed{b = 9}$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{81} = 1$$

$x = 6m \ , \ y = ?$

نعوض x بالمعادلة الاخيرة ونجد (y)

$$\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{81} = 1 \Rightarrow \frac{36}{144} + \frac{y^2}{81} = 1$$

$$\frac{1}{4} + \frac{y^2}{81} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{81} = 1 - \frac{1}{4}$$

$$\frac{y^2}{81} = \frac{3}{4} \Rightarrow y^2 = \frac{3 * 81}{4}$$ بالجذر

$$\boxed{y = \frac{9\sqrt{3}}{2} m}$$

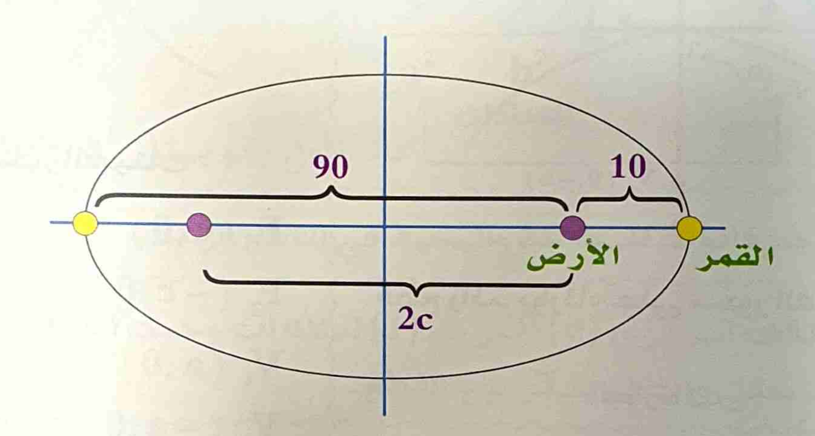
سؤال 14 يدور القمر حول الأرض في مدار على شكل قطع ناقص سيني البؤرتين تقع الأرض في احدى بؤرتيه فاذا كانت اطول مسافة بين الأرض والقمر 90km وأقصر مسافة بينهما 10km جد الأختلاف المركزي للقطع

2016 - د (2)/ خارج

$$90+10=100=2a \rightarrow a=50$$

$$90-10=80=2c \rightarrow c=40$$

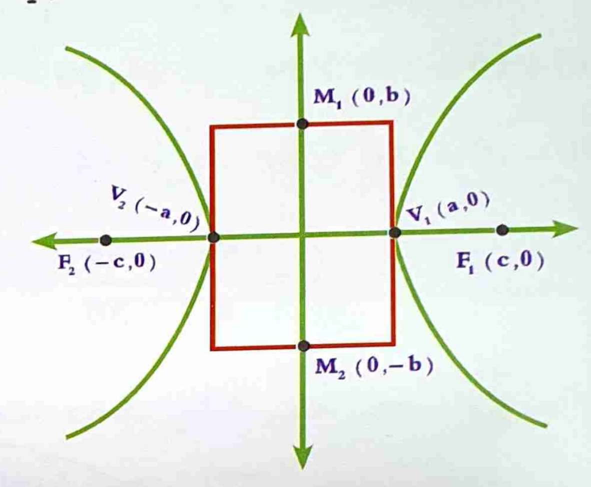
$$e=\frac{c}{a}=\frac{40}{50}=\frac{4}{5}<1$$ أصغر من (1)



الرياضيات

القطع الزائد

تعريف: هو مجموعة من النقط في المستوي التي تكون القيمة المطلقة لفرق بعدي اي منها عن نقطتين ثابتين ((البؤرتان)) يساوي عدداً ثابتاً .



قطع زائد بؤرتاه على محور السينات

البؤرتان $F_1\ (c,0)$ ، $F_2\ (-c,0)$

الرأسان $V_1\ (a,0)$ ، $V_2\ (-a,0)$

القطبان $M_1\ (0\ ,\ b)$ ، $M_2\ (0\ ,\ -b)$

* النقطتان $(0,b)-(0,-b)$ سوف نسميها القطبان فقط للتوضيح لم يطلق عليها اسم اقطاب في المنهج .

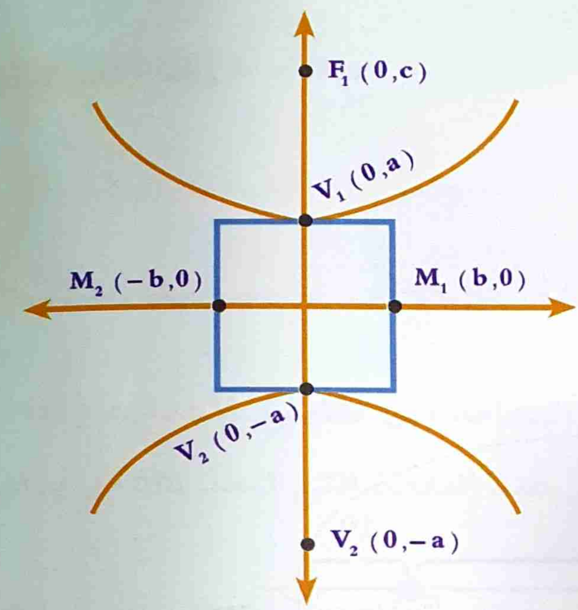
المعادلة القياسية : $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

PF_1 يُسمى نصف القطر البؤري الايمن

PF_2 يُسمى نصف القطر البؤري الايسر

$|PF_1 - PF_2| = 2a$

$|PF_1 - PF_2|$ القيمة المطلقة للفرق بين بعدي أي نقطة عن بؤرتيه .



قطع زائد بؤرتاه على محور الصادات

البؤرتان $F_1\ (0,c)$ ، $F_2\ (0,-c)$

الرأسان $v_1\ (0,a)$ ، $v_2\ (0,-a)$

القطبان $M_1\ (b\ ,\ 0)$ ، $M_2\ (-b\ ,0)$

المعادلة القياسية : $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$

ملاحظات حول القطع الزائد

أولاً مصطلحات القطع الزائد :

$2a=$ طول المحور الحقيقي أو العدد الثابت أو البعد بين الرأسين .

$2b=$ طول المحور المرافق ((التخيلي)) وهو عمودي المحور الحقيقي .

$2c=$ البعد بين البؤرتين .

ثانياً في القطع الزائد (c أكبر a ، c أكبر b) دائماً وقد تكون $a = b$

ثالثاً لاحظ المعادلة القياسية :

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad \frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$$

السينات ، الصادات

دائماً أول رقم يمثل a^2 والثاني (b^2) لا يتغير .

رابعاً لا يوجد قانون للمساحة والمحيط في القطع الزائد .

خامساً الاختلاف المركزي (e) أكبر من (1) لذلك ان وجدت اختلاف مركزي أكبر من (1) هذا قطع زائد حتى وإن لم يذكر نوع القطع .

سادساً في القطع الزائد :

1. كل كلمة يمر $(x,0)$ أو $(0,y)$ يعني هذا (a)
2. كل يمس هذه a
3. كل يقطع عند رقم $x=\pm$ ، رقم $y=\pm$ هذا الرقم هو (a)

سابعاً القوانين :

$$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow a=\sqrt{c^2-b^2} \ , \ b=\sqrt{c^2-a^2}$$

$e=\frac{c}{a}$ الاختلاف المركزي

ثامناً عندما يذكر عبارة قطع زائد قائم معناها طول المحور الحقيقي = طول المحور المرافق

$\boxed{2a=2b} \Rightarrow \boxed{a=b}$ وأن $e=\sqrt{2}$

العلاقات بين القطوع

تعلم كيف تحدد العلاقة بين القطوع من خلال الأمثلة التوضيحية الآتية :

1 لو قال في السؤال مثلاً :

جد معادلة القطع الناقص الذي إحدى بؤرتيه // هي بؤرته القطع المكافئ

ناقص — c — P

// معناها علامة يساوي =

$C = P$

ناقص = مكافئ

2 لو قال في السؤال مثلاً :

جد معادلة القطع الزائد الذي رأساه // هما بؤرتا القطع الناقص

زائد — a — ناقص c

$a = C$

زائد = ناقص

3 لو قال في السؤال مثلاً :

جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه تنطبقان // على بؤرتي القطع الزائد

ناقص — c — c — زائد

// معناها علامة يساوي =

$C = C$

ناقص = زائد

4 لو قال في السؤال مثلاً :

جد معادلة القطع الناقص الذي أحد قطباه // هو رأس القطع الزائد

ناقص — b — a — زائد

// معناها علامة يساوي =

$b = a$

ناقص = زائد

5 عبارة قطعان زائد وناقص كل منهما يمر ببؤرة الاخر معناها :

$a = C$

ناقص = زائد

$a = C$

زائد = ناقص

راجع السؤال الخامس والثامن عشر في الاسئلة الوزارية

* عندما يذكر عبارة قطع زائد قائم معناها
طول المحور الحقيقي = طول المحور المرافق
$e = \sqrt{2}$ وأن $2a = 2b \Rightarrow a = b$

مقارنة بين القطع الناقص والزائد

القطع الزائد	القطع الناقص
أولاً: لا يوجد له مساحة ومحيط لذلك السؤال الذي فيه مساحة أو محيط ولم يذكر نوع القطع فهو ناقص.	أولاً: له مساحة ومحيط فكل سؤال يحوي مساحة ومحيط هذه القطع ناقص
ثانياً: الاختلاف المركزي أكبر من (1)	ثانياً: الاختلاف المركزي أصغر من (1)
ثالثاً: c أكبر من b,a	ثالثاً: a أكبر من b,c
رابعاً: المعادلة القياسية ذات اشارة سالبة $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad , \quad \frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$	رابعاً: المعادلة القياسية ذات اشارة موجبة $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad , \quad \frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$
خامساً: المصطلحات: طول المحور الحقيقي = 2a طول المحور المرافق = 2b	خامساً: المصطلحات: طول المحور الكبير = 2a طول المحور الصغير = 2b
سادساً: يقطع محور واحد عند a	سادساً: يقطع المحورين عند a,b

أمثلة توضيحية:

قطع مخروطي مساحته $20\pi\ cm^2$ ..... الخ ← القطع ناقص / فيه مساحة.

قطع مخروطي اختلافه المركزي 1.2 .... الخ ← القطع زائد / e أكبر من (1).

قطع مخروطي رأسه (5,0) وإحدى بؤرتيه (3,0) ....الخ / القطع ناقص/ $a > c$ (أكبر)

قطع مخروطي رأسه (10,0) ويمر من (0,6) ..... الخ , قطع ناقص يقطع المحورين a,b

قطع مخروطي طول محوره الحقيقي 12 وحدة .... الخ/ قطع زائد/ من مصطلح محور حقيقي.

مثال 1

عيّن البؤرتان والرأسان وطول المحورين والاختلاف المركزي للقطوع الزائدة التالية ثم ارسمها:

1 $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$

$a^2=64 \Rightarrow \boxed{a=8}$

$b^2=36 \Rightarrow \boxed{b=6}$

$c^2=a^2+b^2$

$c^2=64+36 \Rightarrow c^2=100 \Rightarrow c=10$

1. البؤرتان: $F_1\ (c,0) \Rightarrow F_1\ (10,0)$

   $F_2\ (-c,0) \Rightarrow F_2\ (-10,0)$

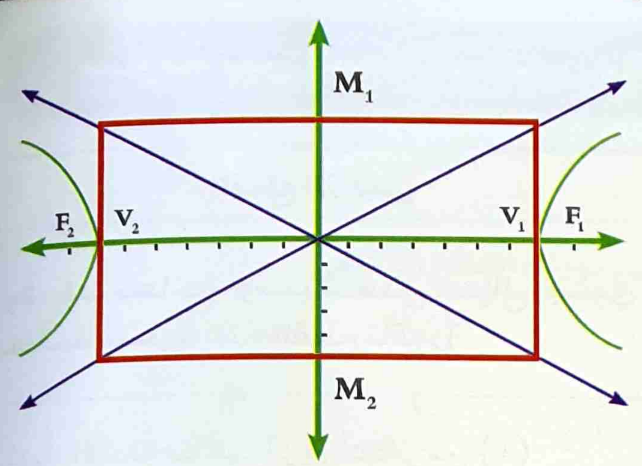
2. الرأسان:

   $V_1\ (a,0) \Rightarrow V_1\ (8,0)$

   $V_2\ (-a,0) \Rightarrow V_2\ (-8,0)$

3. طول المحور الحقيقي $=2a=16$ وحدة
4. طول المحور المرافق $=2b=12$ وحدة
5. الاختلاف المركزي:

$$e=\frac{c}{a}=\frac{10}{8}=\frac{5}{4}$$



2 $12x^2-4y^2=48$

$\left[12x^2-4y^2=48\right]\div 48$

$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$

$a^2=4 \Rightarrow \boxed{a=2}$

$b^2=12 \Rightarrow \boxed{b=2\sqrt{3}}$

$c^2=a^2+b^2$

$c^2=4+12 \Rightarrow c^2=16 \Rightarrow \boxed{c=4}$

1. البؤرتان:

   $F_1\ (c,0) \Rightarrow F_1\ (4,0)$

   $F_2\ (-c,0) \Rightarrow F_2\ (-4,0)$

2. الرأسان:

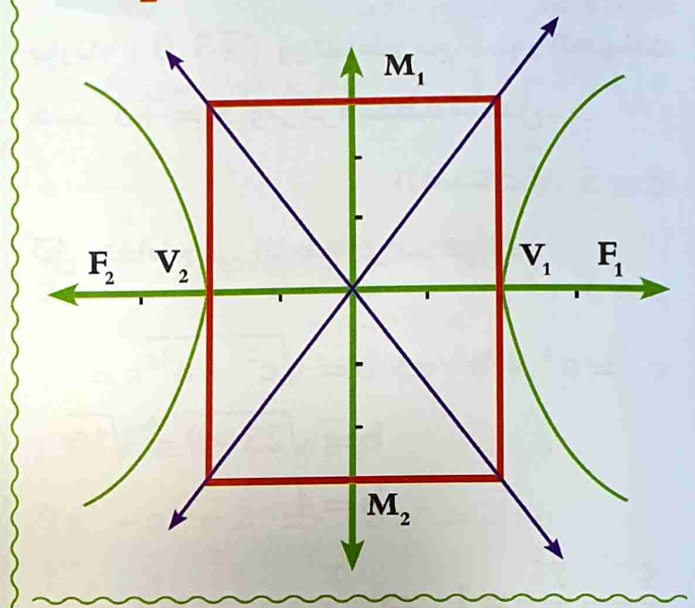
   $V_1\ (a,0) \Rightarrow V_1\ (2,0)$

   $V_2\ (-a,0) \Rightarrow V_2\ (-2,0)$

3. طول المحور الحقيقي $=2a=4$ وحدة
4. طول المحور المرافق $=2b=4\sqrt{3}$ وحدة

5 الاختلاف المركزي: $e = \frac{c}{a}$

$e = \frac{4}{2} = 2 > 1$



3 $\left[16x^2 - 9y^2 = 144\right] \div 144$

2006 - تمهيدي

2014 - نازحين

$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

$a^2 = 9 \Rightarrow \boxed{a = 3}$

$b^2 = 16 \Rightarrow \boxed{b = 4}$

$c^2 = a^2 + b$

$c^2 = 9 + 16 \Rightarrow c^2 = 25 \Rightarrow \boxed{c = 5}$

1 البؤرتان:

$F_1\ (c, 0) \Rightarrow F_1\ (5, 0)$

$F_2\ (-c, 0) \Rightarrow F_2\ (-5, 0)$

2 الرأسان:

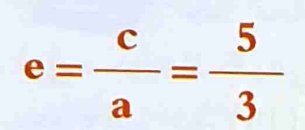
$V_1\ (a, 0) \Rightarrow V_1\ (3, 0)$

$V_2\ (-a, 0) \Rightarrow V_2\ (-3, 0)$

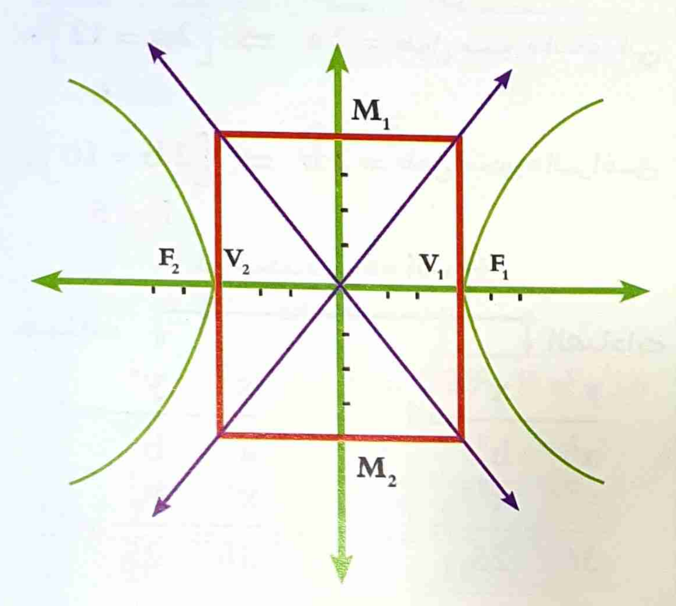


طول المحور الحقيقي ← وحدة $2a = 2 \times 3 = 6$

طول المحور المرافق ← وحدة $2b = 2 \times 4 = 8$



$e = \frac{c}{a} = \frac{5}{3}$



طريقة رسم القطع الزائد

1 نعين الرأسان V_1 , V_2

2 نعين النقطتين M_1 , M_2

3 هذه النقاط الاربعة تكون مستطيل اضلاعه توازي المحورين.

4 نرسم قطري المستطيل فهما يمثلان المحاذيان.

5 نعين البؤرتين F_1 , F_2 ثم نرسم ذراعي القطع.

إذا طلب معادلة القطع الزائد نتبع ما سبق ذكره من الملاحظات

مثال 1 جد معادلة القطع الزائد الذي طول محوره الحقيقي (12) وحدة طول وطول محوره المرافق (10) وحدة طول .

طول محوره الحقيقي $= 2a \Rightarrow [2a = 12] \div 2$

$a = 6$

طول محوره المرافق $= 2b \Rightarrow [2b = 10] \div 2$

$b = 5$

لم يحدد موقع البؤرة

سينات:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{25} = 1$$

الصادات:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{25} = 1$$

مثال 2 جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل وطول محوره المرافق (4) وحدات بؤرتاه $(0, \sqrt{8})$, $(0, -\sqrt{8})$.

طول محوره المرافق $= 2b \Rightarrow [2b = 4] \div 2$

$b = 2$

$c = \sqrt{8}$ ((صادات))

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

$$a = \sqrt{8 - 4} = \sqrt{4}$$

$$a = 2$$

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{4} = 1$$

مثال 3 جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه $(\mp 5, 0)$ ويتقاطع مع محور السينات عند $x = \mp 3$ ومركزه نقطة الأصل .

$c = 5$ ((سينات))

كل يتقاطع في القطع الزائد هو (a)

$a = 3$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

$$b = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16}$$

$$b = 4$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

مثال 4 جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل وطول محوره الحقيقي (6) وحدات والاختلاف المركزي (2) والبؤرتان على محور السينات .

2011 / خارج القطر

طول محوره الحقيقي $= 2a \Rightarrow [2a = 6] \div 2$

$a = 3$

تعويض

$$e = \frac{c}{a}$$

$$2 = \frac{c}{3} \Rightarrow c = 6$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

$$b = \sqrt{36 - 9} = \sqrt{27}$$

$$b^2 = 27$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{27} = 1$$

مثال 5 جد معادلة القطع الزائد الذي طول محوره المرافق ($2\sqrt{2}$) وحدة واختلافه المركزي يساوي (3) ومركزه نقطة الأصل وبؤرتاه على محور الصادات .

$$\text{طول محوره المرافق} = 2b \Rightarrow \left[2b = 2\sqrt{2}\right] \div 2$$

$$b = \sqrt{2}$$

2013 - د (2)

2017 - د (1)/تطبيقي/موصل

$$e = \frac{c}{a}$$

$$3 = \frac{c}{a} \Rightarrow c = 3a \quad ....(1)$$

القانون العام

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$(3a)^2 = a^2 + (\sqrt{2})^2$$

$$9a^2 - a^2 = 2 \Rightarrow \left[8a^2 = 2\right] \div 8$$

$$a^2 = \frac{1}{4}$$

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{y^2}{\frac{1}{4}} - \frac{x^2}{2} = 1}$$

مثال 6 قطع زائد طول محوره الحقيقي (6) وحدات وإحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ويمر بالنقطتين $(1, 2\sqrt{5})$ $(1, -2\sqrt{5})$ جد معادلتي القطعين المكافئ والزائد .

ربع أول $(1, 2\sqrt{5})$ ربع رابع $(1, -2\sqrt{5})$

لقطع المكافئ : الفتحة يمين

$$y^2 = 4Px$$

$$(2\sqrt{5})^2 = 4P(1)$$

$$\left[20 = 4P\right] \div 4 \Rightarrow P = 5$$

$$y^2 = 4(5)x \Rightarrow y^2 = 20x$$

القطع الزائد :

$$\text{طول محوره الحقيقي} = 2a \Rightarrow \left[2a = 6\right] \div 2$$

$$a = 3$$

إحدى بؤرتيه	هي	بؤرة القطع المكافئ
$c_{\text{زائد}}$	=	$P_{\text{مكافئ}}$

$$c = 5$$

$$\therefore c = 5$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

$$b = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16}$$

$$b = 4$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1}$$

1997 - د (1) | 2013 - د (2)

2014 - د (1) | 2016 - د (1)/ خارج

تذكّر في مثال (6) ذكرَ القطع المكافئ ولكنهُ لم يعطي معادلتهُ بل اعطى معلومة عن القطع المكافئ وهي نقطتان لذلك كان التفكير في البداية هو ان نجد معادلة القطع المكافئ عن طريق المعلومة المعطاة .

مثال 7

جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما بؤرتي القطع الناقص $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$ ويمس دليل القطع المكافئ $x^2+12y=0$

القطع الناقص:

2001 - د (1) | 2011 - د (1) | 2009 - تمهيدي | 2014 - د (2) | 2015 - د (1) | 2017 - تمهيدي / تطبيقي | 2019 - تمهيدي / تطبيقي

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$$

$$a^2=25 \Rightarrow a=5$$

$$b^2=9 \Rightarrow b=3$$

$$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow c=\sqrt{a^2-b^2}$$

$$c=\sqrt{25-9}=\sqrt{16}$$

$$c=4$$

القطع المكافئ:

$$x^2+12y=0$$

$$x^2=-12y$$

$$x^2=-4Py \Rightarrow [4P=12]\div 4$$

$$P=3$$

القطع الزائد:

بؤرتاه = هما = بؤرتي القطع الناقص

$$c_{\text{زائد}}=c_{\text{ناقص}}$$

$$c=4$$

كل يمس هو (a)

$$a=P \Rightarrow a=3$$

$$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow b=\sqrt{c^2-a^2}$$

$$b=\sqrt{16-9}=\sqrt{7}$$

$$b^2=7$$

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{7}=1$$

مثال 8

جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه هما بؤرتا القطع الزائد $x^2-3y^2=12$ والنسبة بين طولي محوريه $=\frac{5}{3}$ ومركزه نقطة الاصل

القطع الزائد:

2000 - د (2) | 2007 - تمهيدي | 2008 - د (2)/ خارج | 2013 - د (3) | 2014 - أنبار | 2015 - نازحين | 2016 - نازحين | 2018 - تمهيدي / احيائي | 2019 - د (1)/احيائي/خارج

$$[x^2-3y^2=12]\div 12$$

$$\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1$$

$$c^2=a^2+b^2$$

$$c^2=12+4 \Rightarrow c^2=16 \Rightarrow c=4$$

القطع الناقص:

بؤرتاه هما بؤرتي القطع الزائد

$$c_{\text{ناقص}}=c_{\text{زائد}}$$

$$c=4$$

النسبة بين طولي محوريه $=\frac{\text{كبير}}{\text{صغير}}=\frac{5}{3}$

$$\frac{5}{3}=\frac{2a}{2b}$$

$$[3a=5b]\div 5 \Rightarrow b=\frac{3}{5}a \quad \ldots\ldots(1)$$

$$a^2=b^2+c^2$$

$$a^2=\left(\frac{3}{5}a\right)^2+(4)^2$$

$$\left[a^2=\frac{9}{25}a^2+16\right].25$$

$$25a^2-9a^2=400 \Rightarrow 25a^2-9a^2=400$$

$$[16a^2=400]\div 16 \Rightarrow a^2=25 \Rightarrow a=5$$

نعوض المعادلة (1)

$$b=\frac{3}{5}a$$

$$b=\frac{3}{5}(5) \Rightarrow b=3$$

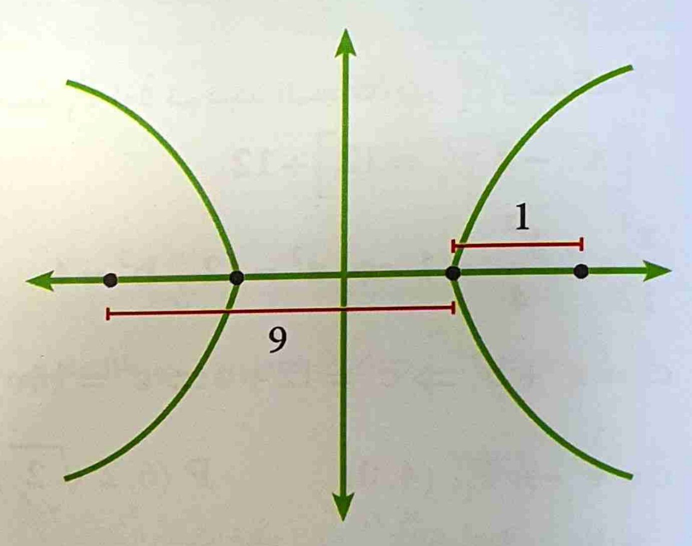
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$$

ملاحظة ومثال عندما يعطي في السؤال بعدي احد الرأسين عن البؤرتين بشكل عددين فأننا نستخدم المجموع والفرق .

مجمـــوع البعديـــن $= 2c$

حاصل طرح البعدين $= 2a$

9 مثال أكتب معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل إذا علمت ان أحد الرأسين يبعد بالبعد 1،9 وحدات بالترتيب عن البؤرتين وينطبق محوراه على المحورين الاحداثيين .



رسم توضيحي تم اخذه على محور السينات

المجموع $9+1=2c \Rightarrow [2c=10] \div 2$

$c=5$

الطرح $9-1=2a \Rightarrow [2a=8] \div 2$

$a=4$

$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow b=\sqrt{c^2-a^2}$

$b=\sqrt{25-16}=\sqrt{9}$

$b=3$

2015 - **تمهيدي**

لم يحدد موقع البؤرة

1. سينات $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$

2. صادات $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{9}=1$

ملاحظة

1. كل نقطة تنتمي الى قطع أو منحني فأنَ هذه النقطة تحقق معادلة القطع أو المنحني أي يمكن تعويضها بمعادلة القطع أو المنحني خاصةً وان كانت معادلة القطع تحوي مجهول .
2. إذا طلب نصف القطر البؤري نستخدم قانون المسافة بين نقطتين .

$$PF=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

* إذا طلب نصف القطر البؤري الايمن PF_1 فنستخدم نقطة السؤال والبؤرة الموجبة .
* إذا طلب نصف القطر البؤري الايسر PF_2 فنستخدم نقطة السؤال والبؤرة السالبة .

مثال 10 النقطة $P(6,L)$ تنتمي الى القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل ومعادلته $x^2-3y^2=12$ جد:

أولاً: قيمة (L) .

النقطة $P(6,L)$ تحقق معادلة القطع الزائد . (x, y)

$$x^2-3y^2=12$$

$$(6)^2-3L^2=12 \Rightarrow 36-3L^2=12$$

$$36-12=3L^2 \Rightarrow \left[24=3L^2\right]\div 3$$

$$L^2=8 \quad \text{بالجذر} \Rightarrow L=\mp 2\sqrt{2}$$

ثانياً: نصف القطر البؤري الايمن PF_1 للقطع المرسوم من الجهة اليمنى للنقطة P

PF_1 → النقطة $P(\quad)$ ، البؤرة $F_1(\quad)$

* نجد البؤرة وبعدها نجد المسافة بين البؤرة الموجبة والنقطة

نجد F_1 اولاً ثم نجد المسافة بين F_1 والنقطة P

$$\left[x^2-3y^2=12\right]\div 12$$

$$\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1 \Rightarrow a^2=12\ ,\ b^2=4$$

$$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow c^2=12+4 \Rightarrow c^2=16$$

$$c=4 \rightarrow F_1\ (4,0) \qquad P\ (6, 2\sqrt{2})$$

($x_1\ y_1$) ، ($x_2\ y_2$) — (قيمة L)

$$PF_1=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$PF_1=\sqrt{(6-4)^2+(2\sqrt{2}-0)^2}$$

$$PF_1=\sqrt{(2)^2+(2\sqrt{2})^2}$$

$$PF_1=\sqrt{4+8}=\sqrt{12}$$

$$PF_1=2\sqrt{3} \quad \text{وحدة}$$

1999 - د (1) | 2010 - تمهيدي

2017 - د (2)/تطبيقي/خارج

2018 - د (2)/احيائي/خارج

مثال 11 قطع زائد مركزه نقطة الأصل ومعادلته $hx^2 - ky^2 = 90$ وطول محوره الحقيقي ($6\sqrt{2}$) وحدة وبؤرتاه تنطبقان على بؤرتا القطع الناقص الذي معادلته $9x^2 + 16y^2 = 576$ جد قيمة $h, k \in R$.

$$\left[9x^2 + 16y^2 = 576\right] \div 576$$

$$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1 \ , \quad a^2 = 64 \ , \ b^2 = 36$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$c = \sqrt{64 - 36} = \sqrt{28}$$

$$c = 2\sqrt{7}$$

لقطع الزائد:

طول محوره الحقيقي $= 2a \Rightarrow \left[2a = 6\sqrt{2}\right] \div 2$

$$a = 3\sqrt{2}$$

بؤرتاه	تنطبقان	على بؤرة القطع الناقص
$c_{\text{زائد}}$	$=$	$c_{\text{ناقص}}$

زائد $c = 2\sqrt{7}$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

$$b = \sqrt{28 - 18}$$

$$b = \sqrt{10} \Rightarrow b^2 = 10$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{18} - \frac{y^2}{10} = 1}$$

معادلة السؤال (التي تحوي مجاهيل)

$$\left[hx^2 - ky^2 = 90\right] \div 90 \Rightarrow \frac{hx^2}{90} - \frac{ky^2}{90} = 1$$

$$\frac{x^2}{\frac{90}{h}} - \frac{y^2}{\frac{90}{k}} = 1$$

$$\frac{x^2}{18} - \frac{y^2}{10} = 1$$

- 1998 - د (1)
- 2012 - د (2)
- 2017 - د (1)/ احيائي
- 2017 - د (1)/ احيائي/خارج
- 2018 - د (2)/ تطبيقي/خارج
- 2019 - د (2)/ تطبيقي

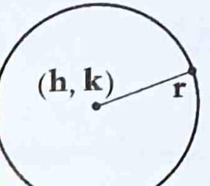
$$\frac{90}{h} = 18 \Rightarrow h = \frac{90}{18} \Rightarrow h = 5$$

$$\frac{90}{k} = 10 \Rightarrow k = \frac{90}{10} \Rightarrow k = 9$$

إستراحة شعرية:

ويا ليتَ أبوابَ المدينةِ كُلَّها
تُسَدُّ وبابٌ في فؤادِكِ يُفتَحُ

ربط الدائرة مع القطوع



المعادلة العامة للدائرة ⟵ $x^2+y^2+Ax+By+C=0$

A ⟵ معامل x

B ⟵ معامل y

C ⟵ الحد المطلق (بدون x أو y)

(تؤخذ قيم A,B,C من المعادلة مع الاشارات)

* معامل y^2 = معامل x^2 = 1 ⟵ إنتبه

أولاً: نجد المركز $c\ (h, k)$

$$\left.\begin{array}{l} h=\frac{-A}{2} \\ k=\frac{-B}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow c\ (h, k)$$

ثانياً: نجد نصف القطر

$$r=\sqrt{h^2+k^2-c}$$

مثال/ جد نصف القطر واحداثي المركز للدائرة التي معادلتها $x^2+y^2-2x-4y-4=0$ (مراجعة من الخامس علمي)

$$x^2+y^2-2x-4y-4=0$$

$$A=-2\ ,\quad B=-4\ ,\quad C=-4$$

$$\left.\begin{array}{l} h=\frac{-A}{2}=\frac{-(-2)}{2}=1 \\ k=\frac{-B}{2}=\frac{-(-4)}{2}=2 \end{array}\right\} \Rightarrow c\ (1, 2)$$

مركز

$$r=\sqrt{h^2+k^2-c}$$

$$r=\sqrt{(1)^2+(2)^2-(-4)}$$

$$r=\sqrt{1+4+4}=\sqrt{9}$$

$r=3$ unit

نصف القطر

سؤال جد معادلة القطع الزائد الذي احدى بؤرتيه هي مركز الدائرة $x^2+y^2-16y+15=0$ ونصف طول محوره المرافق يساوي نصف قطر تلك الدائرة.

2018 - د (3)/احيائي

$$x^2+y^2-16y+15=0 \rightarrow x^2+y^2+0x-16+15=0$$

$$A=0\ ,\ B=-16\ ,\ C=15$$

$$\left.\begin{aligned} h&=\frac{-A}{2}=\frac{0}{2}=0 \\ k&=\frac{-B}{2}=\frac{-(-16)}{2}=8 \end{aligned}\right\} \Rightarrow C\,(h,k) \Rightarrow (0,8)$$

احداثي المركز

$$r=\sqrt{h^2+k^2-c}=\sqrt{(0)^2+(8)^2-15}=\sqrt{64-15}=\sqrt{49}$$

$$\boxed{r=7}\ \text{unit}$$

القطع الزائد احدى بؤرتيه هي مركز الدائرة ← البؤرة هي $(0,8)$

$\boxed{c=8}$ صادات

نصف طول محوره الصغير يساوي نصف قطر الدائرة

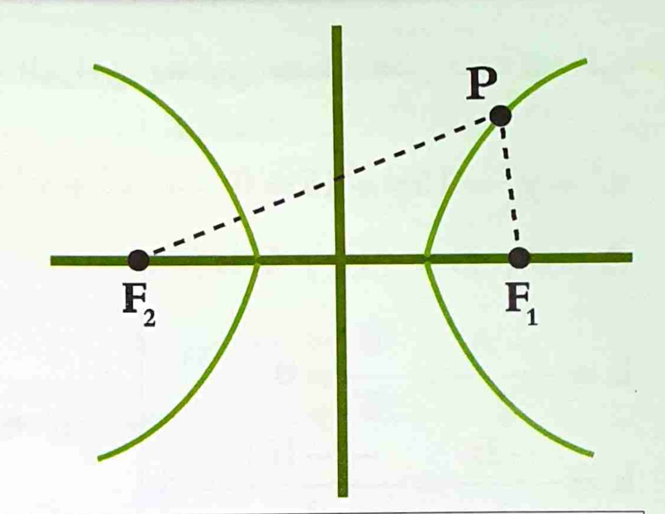
$$r=\frac{1}{2}(2b) \Rightarrow r=b \Rightarrow \boxed{b=7}$$

$$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow a=\sqrt{c^2-b^2}=\sqrt{64-49}=\sqrt{15} \Rightarrow \boxed{a=\sqrt{15}}$$

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1 \Rightarrow \boxed{\frac{y^2}{15}-\frac{x^2}{49}=1}$$

والكوخُ عِندي في جِوارِكَ جَنّةٌ
وَالقصرُ دونَكَ كالفَضا المَهجورُ

إيجاد معادلة القطع الزائد بإستخدام التعريف



القانون $|PF_1 - PF_2| = 2a$

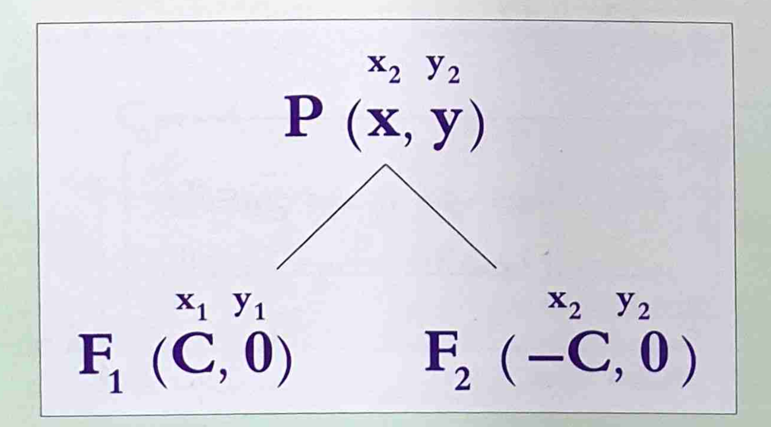
$$\left|\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} - \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\right| = 2a$$

هناك عدة خطوات لحل السؤال

القانون ← التعويض ← التحويل ← التربيع ← الارجاع ← التربيع ثم تصفية الطرفين

التحويل: تحويل أحد الجذرين إلى الطرف الأيمن

الارجاع: ارجاع الجذر الى الطرف الأيسر



مثال 12 باستخدام التعريف جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه $(-2\sqrt{2}, 0)$, $(2\sqrt{2}, 0)$ وينطبق محوره على المحورين الاحداثيين والقيمه المطلقة للفرق بين بعدي أي نقطة عن بؤرتيه = 4 وحدات .

$$P(\overset{x_2}{x}, \overset{y_2}{y})$$

$$F_1(\overset{x_1}{2\sqrt{2}}, \overset{y_1}{0}) \qquad F_2(\overset{x_2}{-2\sqrt{2}}, \overset{y_2}{0})$$

$$|PF_1 - PF_2| = 2a$$

القانون
$$\left|\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} - \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\right| = 2a$$

التعويض
$$\sqrt{(x-2\sqrt{2})^2+(y-0)^2} - \sqrt{(x+2\sqrt{2})^2+(y-0)^2} = \pm 4$$

هذا الجذر يبقى — ننقل الجذر للطرف الاخر

تربيع الطرفين
$$\sqrt{(x-2\sqrt{2})^2+y^2} = \pm 4 + \sqrt{(x+2\sqrt{2})^2+y^2}$$

$$(x-2\sqrt{2})^2 + \cancel{y^2} = 16 \pm 8\sqrt{(x+2\sqrt{2})^2+y^2} + (x+2\sqrt{2})^2 + \cancel{y^2}$$

الجذر حذف مع التربيع — هذا الطرف مربع حدانية

فتح القوس
$$\cancel{x^2} - 4\sqrt{2}x + \cancel{8} = 16 \pm 8\sqrt{x^2+4\sqrt{2}\,x+8+y^2} + \cancel{x^2} + 4\sqrt{2}x + \cancel{8}$$

ارجاع الجذر إلى الطرف الاصلي

التصفية
$$\mp 8\sqrt{x^2+4\sqrt{2}\,x+8+y^2} = 16 + 4\sqrt{2}x + 4\sqrt{2}x$$

$$\left[\mp 8\sqrt{x^2+4\sqrt{2}\,x+8+y^2} = 16 + 8\sqrt{2}x\right] \div 8$$

تربيع الطرفين
$$\mp\sqrt{x^2+4\sqrt{2}\,x+8+y^2} = (2+\sqrt{2}\,x)$$

$$x^2 + \cancel{4\sqrt{2}x} + 8 + y^2 = 4 + \cancel{4\sqrt{2}x} + 2x^2$$

$$2x^2 - x^2 - y^2 = 8 - 4 \Rightarrow \left[x^2 - y^2 = 4\right] \div 4$$

$$\boxed{\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1}$$



الاسئلة الوزارية الخاصة بالقطع الزائد والربط بين القطوع الثلاثة

سؤال 1 جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما بؤرتي القطع الناقص $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$ وأحد رأسيه بؤرة القطع المكافئ $y^2+8x=0$.

1997 - د (2)

القطع الناقص:

$$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$$

$a^2=36 \quad , \quad b^2=20$ ((سينات))

$$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow c=\sqrt{a^2-b^2}$$

$$c=\sqrt{36-20}=\sqrt{16}$$

$$c=4$$

القطع المكافئ:

$$y^2=-8x$$

$$y^2=-4Px \Rightarrow [4P=8]\div 4$$

القطع الزائد: $\underset{\text{زائد}}{C}=\underset{\text{ناقص}}{C} \Rightarrow c=4$

$$\underset{\text{زائد}}{P}=\underset{\text{مكافئ}}{a} \Rightarrow a=2$$

$$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow b=\sqrt{c^2-a^2}$$

$$b=\sqrt{16-4}=\sqrt{12}$$

$$b^2=12$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$$

سؤال 2 جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه تنطبقان على بؤرتي القطع الناقص $3x^2+5y^2=120$ والنسبة بين طول محوره الحقيقي والبعد بين بؤرتيه كنسبة $\frac{1}{2}$.

2001 - د (1)

القطع الناقص: $\left[\frac{3x^2}{120}+\frac{5y^2}{120}=\frac{120}{120}\right]\div 120$

$\frac{x^2}{40}+\frac{y^2}{24}=1 \quad , \quad a^2=40 \quad , \quad b^2=24$ ((سينات))

$$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow c=\sqrt{a^2-b^2}$$

$$c=\sqrt{40-24}=\sqrt{16}$$

$$c=4$$

القطع الزائد:

$$\underset{\text{زائد}}{C}=\underset{\text{ناقص}}{C} \Rightarrow c=4$$

$$\frac{\cancel{2}a}{\cancel{2}c}=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{a}{c}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{a}{4}=\frac{1}{2} \Rightarrow [2a=4]\div 2$$

$$a=2$$

$$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow b=\sqrt{c^2-a^2}$$

$$b=\sqrt{16-4}=\sqrt{12}$$

$$b^2=12$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$$

سؤال 3 جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما بؤرتي القطعين المكافئين $y^2=20x$, $y^2=-20x$ والفرق بين طولي محوريه الحقيقي والمرافق يساوي (2) وحدة.

القطع المكافئ:

$$y^2=20x$$

$$y^2=4Px \Rightarrow [4P=20]\div 4 \Rightarrow P=5, F(5,0)$$

$$y^2=-20x$$

$$y^2=-4Px \Rightarrow [4P=20]\div 4 \Rightarrow P=5, F(-5,0)$$

القطع الزائد:

$$\underset{\text{زائد}}{C}=\underset{\text{مكافئ}}{P} \Rightarrow c=5$$

الفرق بين طولي محوريه الحقيقي والمرافق

$$[2a-2b=2]\div 2$$

$$a-b=1 \Rightarrow a=1+b \quad ....(1)$$

تعويض

$$c^2=a^2+b^2$$

مربع حدانية

$$(5)^2=(1+b)^2+b^2 \Rightarrow 25=1+2b+b^2+b^2$$

$$2b^2+2b+1-25=0$$

$$[2b^2+2b-24=0]\div 2$$

$$b^2+b-12=0$$

$$(b+4)\ (b-3)=0$$

أما $b+4=0$ لا يمكن ان تكون سالبة لذلك يُهمل

أو $b-3=0 \Rightarrow b=3$ نعوض في معادلة (1)

$$a=1+b=1+3 \Rightarrow a=4$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$$

ملاحظة حرف العطف (و) في اللغة العربية ((الفرق بين طولي محوريه الحقيقي والمرافق)) تحمل وجهين:

الأول $\leftarrow$ $2a-2b=2$

الثاني $\leftarrow$ $2b-2a=2$

تم حل السؤال على الاحتمال الأول وسنتطرق الى الوجه الثاني من الحل.

$$[2b-2a=2]\div 2$$

$$b-a=1 \Rightarrow b=1+a \quad ....(1)$$

$$c^2=a^2+b^2$$

$$(5)^2=a^2+(1+a)^2$$

مربع حدانية

$$25=a^2+1+2a+a^2$$

$$2a^2+2a-24=0\div 2$$

$$a^2+a-12=0$$

$$(a+4)\ (a-3)=0$$

$a+4=0$ لا يمكن ان تكون سالبة لذلك يُهمل

$$a-3=0 \Rightarrow a=3$$

$$b=1+a=1+3=4$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$$

سؤال 4 جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما رأسا القطع الناقص $x^2 + 9y^2 = 36$ والنسبة بين طول محوره الحقيقي الى البعد بين بؤرتيه تساوي $\left(\frac{1}{2}\right)$ وينطبق محوره على المحورين الاحداثيين .

2002 - د (2)

القطع الناقص:

$$\left[\frac{x^2}{36} + \frac{9y^2}{36} = \frac{36}{36}\right] \div 36$$

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{4} = 1 \quad , \quad a^2 = 36 \Rightarrow a = 6$$

القطع الزائد:

بؤرتاه	هما	رأسا القطع الناقص
c زائد	=	a ناقص

$c = 6$

$$\frac{2a}{2c} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{a}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow [2a = 6] \div 2$$

$a = 3$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

$$b = \sqrt{36 - 9} = \sqrt{27}$$

$b^2 = 27$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{27} = 1$$

سؤال 5 جد معادلة القطع الزائد الذي يمر ببؤرتي القطع الناقص $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1$ والنسبة بين البعد بين بؤرتيه وطول محوره المرافق كنسبة $\frac{5}{4}$.

القطع الناقص: $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1$

$a^2 = 49 \quad , \quad b^2 = 24$ ((سينات))

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$c = \sqrt{49 - 24} = \sqrt{25}$$

$c = 5$

القطع الزائد:

$c_{\text{ناقص}} = a_{\text{زائد}}$

قال يمر وكل يمر a في القطع الزائد

$a = 5$

$$\frac{2c}{2b} = \frac{5}{4} \quad [4c = 5b] \div 4 \Rightarrow c = \frac{5}{4} b \quad .....(1)$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$\left(\frac{5}{4} b\right)^2 = (5)^2 + b^2$$

$$\left[\frac{25}{16} b^2 = 25 + b^2\right] . 16 \Rightarrow 25b^2 = 400 + 16b^2$$

$$25b^2 - 16b^2 = 400 \Rightarrow 9b^2 = 400$$

$$b^2 = \frac{400}{9}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{\frac{400}{9}} = 1$$

سؤال 6 قطعان زائد وناقص كل منهما يمر ببؤرة الاخر جد معادلة القطع الزائد اذا علمت ان معادلة القطع الناقص هي $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ علماً ان محوريهما على المحورين الاحداثيين.

القطع الناقص:

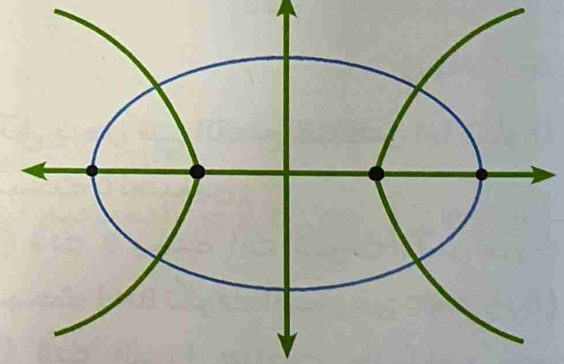
$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$$

$a^2=25 \to a=5 \quad , \quad b^2=9 \to b=3$

$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{25-9}$

$c=\sqrt{16} \Rightarrow c=4$

رسم توضيحي



القطع الزائد:

$\underset{\text{زائد}}{a} = \underset{\text{ناقص}}{c} \Rightarrow a=4$ للزائد

$\underset{\text{زائد}}{c} = \underset{\text{ناقص}}{a} \Rightarrow c=5$ للزائد

$b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{25-16}=\sqrt{9}$

$b=3$ للزائد

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$$

سؤال 7 جد معادلة القطع المخروطي الذي محوراه هما المحورين الاحداثيين وإحدى بؤرتيه $(-5,0)$ واحد رأسيه $(3,0)$.

2004 - د (2) | 2005 - تمهيدي | 2006 - د (2) | 2008 - د (2) | 2014 - د (3)

البؤرة $(-5,0) \to c=5$

الرأس $(3,0) \to a=3$

$a<c$ «أصغر» أي ان القطع زائد

$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow b=\sqrt{c^2-a^2}$

$b=\sqrt{25-9}=\sqrt{16} \Rightarrow b=4$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$$

سؤال 8 جد معادلة القطع الزائد الذي إحدى بؤرتيه نقطة تقاطع المستقيم $2x-y=8$ مع محور السينات وطول محوره محوره التخيلي (4) وحدات.

2007 تمهيدي

$y=0$ (نقطة التقاطع مع محور السينات)

$2x-0=8 \Rightarrow [2x=8]\div 2 \Rightarrow x=4$

$(4,0)\to \quad , \quad c=4$

طول محوره التخيلي $=2b \Rightarrow [2b=4]\div 2$

$b=2$

$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow a=\sqrt{c^2-b^2}$

$a=\sqrt{16-4}=\sqrt{12}$

$a^2=12$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1$$

سؤال 9 جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما بؤرتي القطعين المكافئين $y^2 = 20x$, $y^2 = -20x$ وطول محوره المرافق (8) وحدات .

2005 - د (1)　2008 - د (1)　2015 - د (4) رصافة

القطع المكافئ :

$y^2 = 20x$

$y^2 = 4Px \Rightarrow [4P = 20] \div 4 \Rightarrow P = 5$

$F(5,0)$

$y^2 = -20x$

$y^2 = -4Px \Rightarrow 4P = 20 \div 4 \Rightarrow P = 5$

$F(-5,0)$

القطع الزائد : $P = c \Rightarrow c = 5$

طول محوره التخيلي $= 2b \Rightarrow [2b = 8] \div 2$

$b = 4$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow a = \sqrt{c^2 - b^2}$

$a = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9}$

$a = 3$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

سؤال 10 جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه هما بؤرتي القطع الزائد $8y^2 - x^2 = 32$ ويمس دليل القطع المكافئ $y^2 + 16x = 0$.

2006 - د (1)　2016 - د (2)

القطع الزائد :

$$[8y^2 - x^2 = 32] \div 32 \Rightarrow \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{32} = 1$$

$a^2 = 4,\ b^2 = 32\ ,\ c = ?$

$c^2 = a^2 + b^2$

بالجذر

$c^2 = 4 + 32 \Rightarrow c^2 = 36 \Rightarrow c = 6$

القطع المكافئ :

$y^2 = -16x$

$y^2 = -4Px \Rightarrow [4P = 16] \div 4$

$P = 4$

القطع الناقص بؤرتاه هما بؤرتي القطع الزائد

$c_{\text{زائد}} = c_{\text{ناقص}} \Rightarrow c = 6$

$P_{\text{مكافئ}} = b_{\text{ناقص}} \Rightarrow b = 4$

* كل يمس في القطع الناقص اما a أو b هنا اصبحت b لسببين :

1. لأن a يجب ان تكون أكبر من c إذا اصبحت a=4 تكون أصغر من c وهي (6) .
2. لأن البؤرة صادات والمكافئ سينات والذي يخالف البؤرة هو قطب b

$a^2 = b^2 + c^2$

$a^2 = 4^2 + 6^2$

$a^2 = 16 + 36 \Rightarrow a^2 = 52$

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{52} = 1$$

سؤال 11 جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل والبعد بين بؤرتيه (8) وحدات ورأساه بؤرتا القطع الزائد $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.

2007 - د (1)

القطع الزائد :

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$$

سينات $a^2=16 \quad , \quad b^2=9$

$$c^2=a^2+b^2$$

$$c^2=16+9 \Rightarrow c^2=25 \Rightarrow c=5$$

القطع الناقص :

$$\underset{\text{ناقص}}{a} = \underset{\text{زائد}}{c} \Rightarrow a=5$$

البعد بين بؤرتيه $=2c \Rightarrow [2c=8]\div 2$

$$c=4$$

$$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow b=\sqrt{a^2-c^2}$$

$$b=\sqrt{25-16}=\sqrt{9}$$

$$b=3$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$$

سؤال 12 جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما رأسا القطع الناقص $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$ وطول محوره الحقيقي (12) وحدة وينطبق محوراه على المحورين الاحداثيين .

2007
خارج القطر

القطع الناقص :

$$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1 \qquad a^2=100 \Rightarrow a=10$$

$$V_1(10,0), V_2(-10,0)$$

القطع الزائد :

القطع الزائد بؤرتاه	هما	رأسا القطع الناقص
c	=	a

للزائد $c=10$

طول محوره الحقيقي $=2a \Rightarrow [2a=12]\div 2$

للزائد $a=6$

$$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow b=\sqrt{c^2-a^2}$$

$$b=\sqrt{100-36}$$

$$b=\sqrt{64} \Rightarrow b=8$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$$

سؤال 13 جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه تنطبقان على بؤرتي القطع الناقص $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ والنسبة بين طول محوره الحقيقي الى البعد بين بؤرتيه تساوي $\left(\frac{1}{2}\right)$

2008 تمهيدي

القطع الناقص:

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1 \quad , a^2=25 , b^2=9 , c=?$$

$$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow c=\sqrt{a^2-b^2}$$

$$c=\sqrt{25-9}=\sqrt{16}$$

$c=4$ للقطع الناقص

القطع الزائد:

بؤرتاه	تنطبقان	على بؤرتي القطع الناقص
$c_{\text{زائد}}$	$=$	$c_{\text{ناقص}}$

$c=4$

$$\frac{\text{طول محوره الحقيقي}}{\text{البعد بين بؤرتيه}}=\frac{2a}{2c}\Rightarrow\frac{\cancel{2}a}{\cancel{2}c}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{a}{4}=\frac{1}{2}\Rightarrow[2a=4]\div 2$$

$a=2$ للزائد

$$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow b=\sqrt{c^2-a^2}$$

$$b=\sqrt{16-4}=\sqrt{12}$$

$$b^2=12$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$$

سؤال 14 جد معادلة القطع الناقص الذي يمر ببؤرتي القطع الزائد $9y^2-16x^2=144$ ويقطع من محور السينات جزءاً طوله 12 وحدة.

2009 - د (1)

القطع الزائد:

$$[9y^2-16x^2=144]\div 144$$

$$\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{9}=1 \quad a^2=16 \ , b^2=9$$ صادات

$$c^2=a^2+b^2$$

$$c^2=16+9$$

$$c^2=25\rightarrow c=5\rightarrow F_1\ (0,5), F_2\ (0,-5)$$

القطع الناقص:

القطع الناقص يمر من بؤرة الزائد $(0,5)$

$a=5$ أو $b=5$

الجزء المقطوع يمر من محور السينات

أما $[2a=12]\div 2 \qquad a=6$

أو $[2b=12]\div 2 \qquad b=6$

الأكبر $a \leftarrow a=6$ سينات

الأصغر $b \leftarrow b=5$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{25}=1}$$

سؤال 15 جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما بؤرتي القطع الناقص $25x^2 + 9y^2 = 225$ ويمس دليل القطع المكافئ الذي معادلته $x^2 + 8y = 0$.

2015 - د (3)

القطع الناقص:

$$[25x^2 + 9y^2 = 225] \div 225$$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1 \quad , \quad a^2 = 25 , b^2 = 9$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$c = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16}$$

$$c = 4$$

القطع المكافئ:

$$x^2 = -8y$$

$$x^2 = -4Py \Rightarrow [4P = 8] \div 4$$

$$P = 2$$

القطع الزائد:

$$c_{\text{ناقص}} = c_{\text{زائد}} \Rightarrow c = 4$$

$$P_{\text{مكافئ}} = a_{\text{زائد}} \Rightarrow a = 2$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

$$b = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12}$$

$$b^2 = 12$$

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{12} = 1$$

سؤال 16 جد معادلة القطع المخروطي الذي مركزه نقطة الأصل وينطبق محوراه على المحورين الاحداثيين واختلافه المركزي يساوي (3) ويمر بالنقطة (0,2) .

2016 تمهيدي

* القطع زائد لأن $e > 1$

الاختلاف المركزي أكبر من (1)

$(0,2) \rightarrow a = 2$ (رأس صادات)

$$e = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{3}{1} = \frac{c}{2}$$

$$c = 6$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

$$b = \sqrt{36 - 4}$$

$$b = \sqrt{32} \Rightarrow b^2 = 32$$

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{32} = 1$$

إستراحة شعرية

دعْ حب أو من كلفت بحبه
ما الحبُ إلا للحبيبِ الأخر
ما قد تولى لا ارتجاع لطيبه
هل غائبُ اللذات مثل الحاضرِ

سؤال 17 جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه تقعان على محور السينات ومجموع طولي محوريه يساوي (18) وحدة وبؤرتاه تنطبقان على بؤرتي القطع الزائد $x^2 - 2y^2 = 6$.

القطع الزائد: $[x^2 - 2y^2 = 6] \div 6$

2014 نازحين

$\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{3} = 1 \quad , \quad a^2 = 6, b^2 = 3$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 6 + 3$

$c^2 = 9 \to c = 3$

القطع الناقص:

$c_{\text{ناقص}} = c_{\text{زائد}}$

$c = 3$

مجموع طولي محوريه $[2a + 2b = 18] \div 2$

$a + b = 9 \Rightarrow a = 9 - b \quad ....(1)$

$a^2 = b^2 + c^2$

$(9 - b)^2 = b^2 + (3)^2$

$81 - 18b + \cancel{b^2} = \cancel{b^2} + 9 \Rightarrow 18b = 81 - 9$

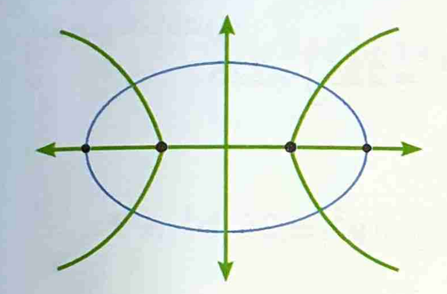
$[18b = 72] \div 18 \Rightarrow b = 4$

$a = 9 - b$

$a = 9 - 4 \Rightarrow a = 5$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

سؤال 18 جد معادلة القطع الزائد والناقص اذا كان كل منهما يمر ببؤرتي الاخر وكلاهما تقعان على محور السينات وطول المحور الكبير يساوي $6\sqrt{2}$ وحدة طول وطول المحور الحقيقي يساوي (6) وحدة طول .



2016 - د (1)

2017 - د (2)/تطبيقي/موصل

القطع الزائد: $[2a = 6] \div 2$

$a = 3$ زائد

القطع الناقص: $[2a = 6\sqrt{2}] \div 2$

$a = 3\sqrt{2}$ ناقص

$a_{\text{زائد}} = c_{\text{ناقص}} \to c = 3$ ناقص

$a_{\text{ناقص}} = c_{\text{زائد}} \to c = 3\sqrt{2}$ زائد

الزائد	الناقص
$b = \sqrt{c^2 - a^2}$	$b = \sqrt{a^2 - c^2}$
$b = \sqrt{18 - 9} = \sqrt{9}$	$b = \sqrt{18 - 9} = \sqrt{9}$
$b = 3$	$b = 3$
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
$\boxed{\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{9} = 1}$	$\boxed{\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1}$

سؤال 19 عيّن النقاط على القطع الزائد الذي معادلته $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{1}=1$ والتي تبعد من البؤرة في الفرع الايمن بمقدار $\frac{1}{\sqrt{3}}$ وحدة.

2005 - د (2)

$$\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{1}=1 \Rightarrow a^2=3 \ , \ b^2=1 \ , \ c=?$$

$$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow c^2=3+1$$

$$c^2=4$$

$$c=2$$

$$\overset{x_1 \ , y_1}{F_1(2,0)} \qquad \overset{x_2 \ , y_2}{P(x,y)}$$

$$PF_1=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

بالتربيع

$$\frac{1}{\sqrt{3}}=\sqrt{(x-2)^2+(y-0)^2}$$

$$\frac{1}{3}=(x-2)^2+y^2$$

مربع حدانية

$$\left[\frac{1}{3}=x^2-4x+4+y^2\right].3$$

$$1=3x^2-12x+12+3y^2$$

$$3x^2+3y^2-12x+11=0 \quad ....(1)$$

نتخلص من y^2 ونجدها من معادلة القطع

$$\frac{x^2}{3}-y^2=1 \Rightarrow y^2=\frac{x^2}{3}-1 \quad ....(2)$$

$$3x^2+3\left(\frac{x^2}{3}-1\right)-12x+11=0$$

$$3x^2+x^2-3-12x+11=0$$

$$\left[4x^2-12x+8=0\right]\div 4$$

$$x^2-3x+2=0$$

$$(x-1)(x-2)=0$$

$$x-1=0 \Rightarrow x=1$$

$$x-2=0 \Rightarrow x=2$$

عندما $x=1$

$$y^2=\frac{x^2}{3}-1$$

$$y^2=\frac{1}{3}-1=\frac{-2}{3} \notin R$$ يُهمل

عندما $x=2$

بالجذر

$$y^2=\frac{2^2}{3}-1 \Rightarrow y^2=\frac{1}{3}$$

توحيد مقامات

$$y=\mp\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$P_1\left(2,\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \qquad P_2\left(2,\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$$

إستراحة شعرية

وهواكَ في قلبِ الظنونِ حقيقةٌ
لا ريبَ فيهِ وحبُّ غيرِكَ باطلُ

إن كانَ حبكَ في الفؤادِ فريضةً
فسواكَ في شرعِ الغرامِ نوافلُ

سؤال 20 لتكن $x^2 - ky^2 = 3$ تمثل معادلة قطع زائد احدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $y^2 + 8x = 0$ جد قيمه k.

2007 - د (1)

القطع المكافئ:

$$y^2 = -8x$$

$$y^2 = -4Px \Rightarrow [4P = 8] \div 4$$

$$P = 2$$

القطع الزائد:

$$\underset{\text{زائد}}{c} = \underset{\text{مكافئ}}{P}$$

$$c = 2$$

$$[x^2 - ky^2 = 3] \div 3 \Rightarrow \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{\frac{3}{k}} = 1$$

$$a^2 = 3 \quad , \quad b^2 = \frac{3}{k} \quad , \quad c = 2$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$(2)^2 = 3 + \frac{3}{k}$$

$$4 = 3 + \frac{3}{k} \Rightarrow 4 - 3 = \frac{3}{k} \Rightarrow 1 = \frac{3}{k}$$

$$\boxed{k = 3}$$

سؤال 21 لتكن $5y^2 - 4x^2 = h$ معادلة قطع زائد واحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $4y - 5x^2 = 0$ جد قيمه h.

2003 - د (1)

القطع المكافئ:

$$4y - 5x^2 = 0$$

$$[5x^2 = 4y] \div 5$$

$$x^2 = \frac{4}{5}y$$

$$x^2 = \frac{4}{5}y$$

$$x^2 = 4Py \Rightarrow \left[4P = \frac{4}{5}\right] \div 4$$

$$P = \frac{\cancel{4}}{\cancel{4} \times 5} \Rightarrow P = \frac{1}{5}$$

القطع الزائد:

$$\underset{\text{مكافئ}}{P} = \underset{\text{زائد}}{c} \Rightarrow c = \frac{1}{5}$$

$$[5y^2 - 4x^2 = h] \div h$$

$$\frac{y^2}{\frac{h}{5}} - \frac{x^2}{\frac{h}{4}} = 1$$

$$a^2 = \frac{h}{5} \quad , \quad b^2 = \frac{h}{4} \quad , \quad c = \frac{1}{5}$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{h}{5} + \frac{h}{4}$$ توحيد مقامات

$$\frac{1}{25} = \frac{4h + 5h}{20} \Rightarrow \frac{1}{25} = \frac{9h}{20}$$

$$h = \frac{\overset{4}{\cancel{20}}}{9 \times \underset{5}{\cancel{25}}} \Rightarrow h = \frac{4}{45}$$

سؤال 22 قطع مكافئ معادلته $x^2 = 10y - 3ky$ ومعادلة دليله $y = 2k$ جد قيمة k ثم جد معادلة القطع الزائد الذي احدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ اعلاه وطول محوره المرافق 2 وحدة

2017 - د (3)/تطبيقي

لوجود المجهول k هنالك احتمالين للمقارنة $x^2 = (10-3k)\,y$

الإحتمال الأول الدليل سالب $y = -p$ المعادلة موجبة $x^2 = 4py$

$x^2 = 4py \rightarrow 4p = 10 - 3k \;....\; (1)$ بالمقارنة مع $x^2 = (10-3k)\,y$

$y = -p \rightarrow -p = 2k \rightarrow p = -2k \;....\; (2)$ بالمقارنة مع $y = 2k$

نعوض الثانية في الأولى $\rightarrow -8k = 10 - 3k \rightarrow -5k = 10 \rightarrow k = -2$

وبتعويض k في الثانية $\rightarrow p = 4 \rightarrow (0, 4)$ بؤرة المكافئ

أذن بؤرتي الزائد هي $(0, -4)\,,\,(0, 4)$

$c = 4 \rightarrow c^2 = 16$

طول المحور المرافق $= 2 \rightarrow 2b = 2 \rightarrow b = 1 \rightarrow b^2 = 1$

$c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow 16 = a^2 + 1 \rightarrow a^2 = 15$

معادلة القطع الزائد $\frac{y^2}{15} - \frac{x^2}{1} = 1$

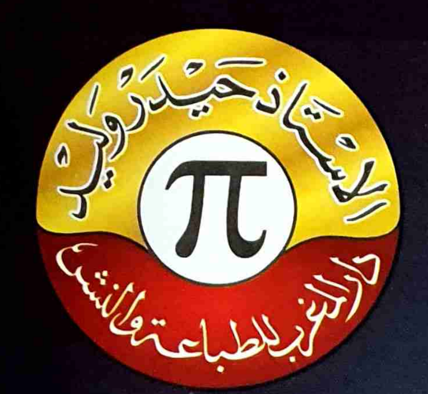
الإحتمال الثاني الدليل موجب $y = p$ المعادلة سالبة $x^2 = -4py$

$x^2 = -4py \rightarrow -4p = 10 - 3k \;....\; (1)$ بالمقارنة مع $x^2 = (10-3k)\,y$

$y = p \rightarrow p = 2k \rightarrow p = 2k \;....\; (2)$ بالمقارنة مع $y = 2k$

نعوض الثانية في الأولى $\rightarrow -8k = 10 - 3k \rightarrow -5k = 10 \rightarrow k = -2$

وبتعويض k في الثانية $p = -4 \rightarrow$ وهكذا غير ممكن لأن P دائماً موجبة



الأستاذ

حيدر وليد

07701780364

المسند في الرياضيات

الهندسة الفضائية

6

2021



07702729223

ملازم دار المغرب

مراجعة في الهندسة

1. عبارة التوازي : يمكن رسم مستقيم واحد فقط موازٍ لمستقيم معلوم من نقطة لا تنتمي إليه .
2. لكل مستقيمين متقاطعين يوجد مستوٍ وحيد يحويهما .
3. لكل مستقيمين متوازيين يوجد مستوٍ وحيد يحويهما .
4. إذا تقاطع مستويان فان مجموعة التقاطع مستقيم .
5. مستقيم تقاطع مستويين يحوي النقاط المشتركة بينهما .
6. إذا وازى مستقيم مستوياً فانه يوازي جميع المستقيمات الناتجة من تقاطع هذا المستوي مع المستويات التي تحوي هذا المستقيم .
7. إذا وازى مستقيم مستوي فالمستقيم المار من نقطة من نقاط المستوي موازياً للمستقيم المعلوم يكون محتوى في المستقيم .
8. إذا وازى كل من مستقيمين متقاطعين مستوياً فان مستويهما يوازي هذا المستوي .
9. إذا وازى ضلعا زاوية ضلعي زاوية اخرى توازى مستويهما وتساوى قياس الزاويتين .
10. يتعامد المستقيمين اذا كان قياس الزاوية بينهما قائمة وبالعكس .
11. في المستوي الواحد : المستقيم العمودي على احد مستقيمين توازيين يكون عمودياً على الآخر .
12. في المستوي الواحد : يوجد مستقيم وحيد عمودي على مستقيم معلوم من نقطة معلومة .
13. في الفراغ :

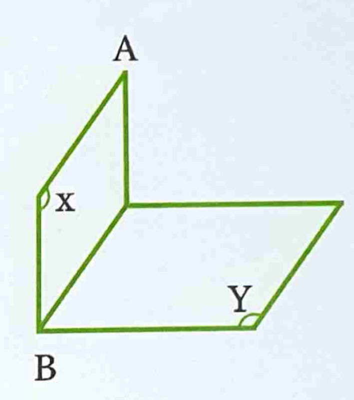
    (أ) يوجد مستقيم وحيد عمودي على مستقيم معلوم من نقطة لا تنتمي اليه .

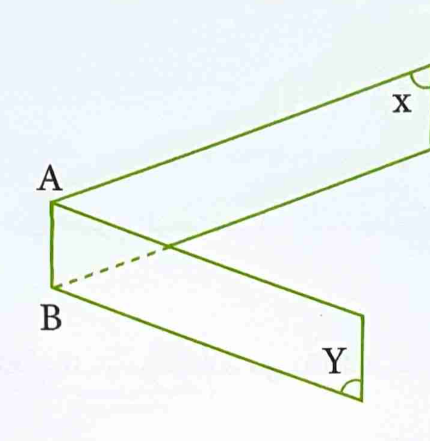
    (ب) يوجد عدد غير منتهي من المستقيمات العمودية على مستقيم معلوم من نقطة تنتمي اليه .
14. المستقيم العمودي على مستوي يكون عمودياً على جميع المستقيمات المرسومة من اثره في ذلك المستوي وبالعكس .
15. المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عمودياً على مستو بهما .
16. يوجد مستقيم وحيد عمودي على مستوٍ معلوم من نقطة معلومة .
17. المستوي العمودي على احد مستقيمين متوازيين يكون عمودياً على الآخر .
18. المستقيمان العموديان على مستوٍ واحد متوازيان .

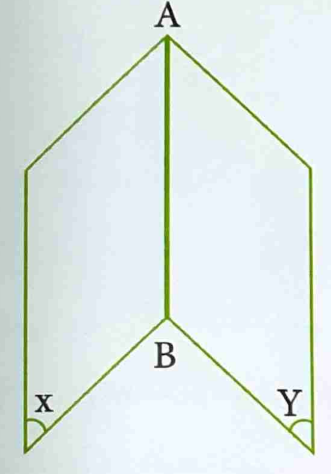
الزاوية الزوجية والمستويات المتعامدة

الزاوية الزوجية: إتحاد نصفي مستويين لهما حافة مشتركة.

تسمى الحافة المشتركة بـ (حرف الزاوية الزوجية) ويسمى كل من نصفي المستويين بـ (وجه الزاوية الزوجية) كما في الشكل.







حيث $\overleftrightarrow{AB}$ هو حرف الزاوية الزوجية و هما وجهاها ويعبر عن الزاوية الزوجية بالتعبير:

$$(x)-\overleftrightarrow{AB}-(Y)$$

وقد يعبر عنها بحرف الزاوية الزوجية إن لم يكن مشتركاً مع زاوية إخرى.

مثلاً:

الزاوية الزوجية

$(x)-\overleftrightarrow{AB}-(Z)$

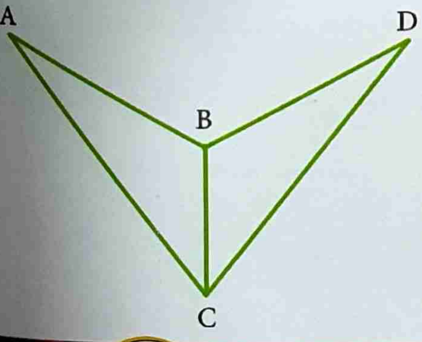
$(x)-\overleftrightarrow{AB}-(Y)$

$(Y)-\overleftrightarrow{AB}-(Z)$

ولا يمكن أن تكتب الزاوية الزوجية بشكل $\overleftrightarrow{AB}$ في هذا المثال لأن الحرف $\overleftrightarrow{AB}$ مشترك في أكثر من زاوية زوجية.

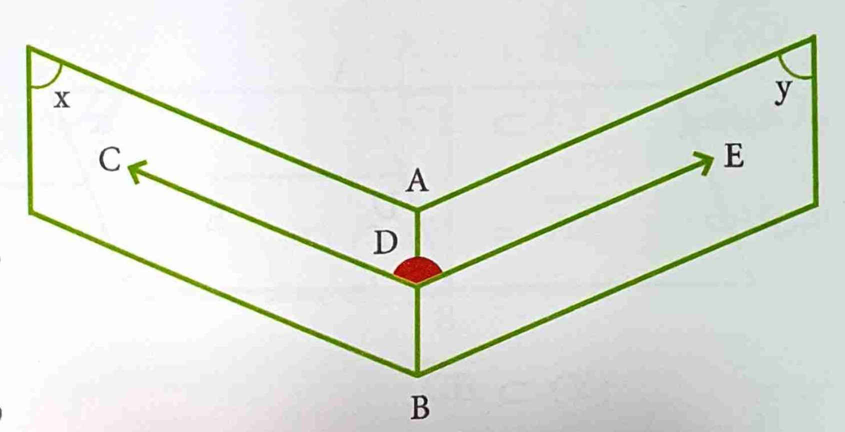
ملاحظة

عندما تكون أربع نقاط ليست في مستوٍ واحد. نكتب الزاوية الزوجية $A-\overleftrightarrow{BC}-D$ أو الزاوية الزوجية بين المستويين (ABC) , (DBC) كما في الشكل الآتي:



وتقاس الزاوية الزوجية كالآتي :

نأخذ نقطة D على الحافة المشتركة ونرسم من D العمود في (x) والعمود في (y) على الحرف فيكون قياس الزاوية الزوجية بين المستويين هو قياس الزاوية CDE وتسمى الزاوية العائدة للزاوية الزوجية كما في الشكل الآتي :



بعبارة اخرى لدينا الزاوية الزوجية

$$(x)-\overleftrightarrow{AB}-(Y)$$

ولدينا

$$\overrightarrow{DC}\subset(x)\ ,\ \overrightarrow{DE}\subset(Y)$$

$$DC\perp\overleftrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{DE}\perp\overleftrightarrow{AB}$$

$\therefore$ $\measuredangle\, C\,D\,E$ هي الزاوية المستوية العائدة للزاوية الزوجية

$(x)-\overleftrightarrow{AB}-(Y)$ أو $\overleftrightarrow{AB}$

الزاوية المستوية العائدة لزاوية زوجية:

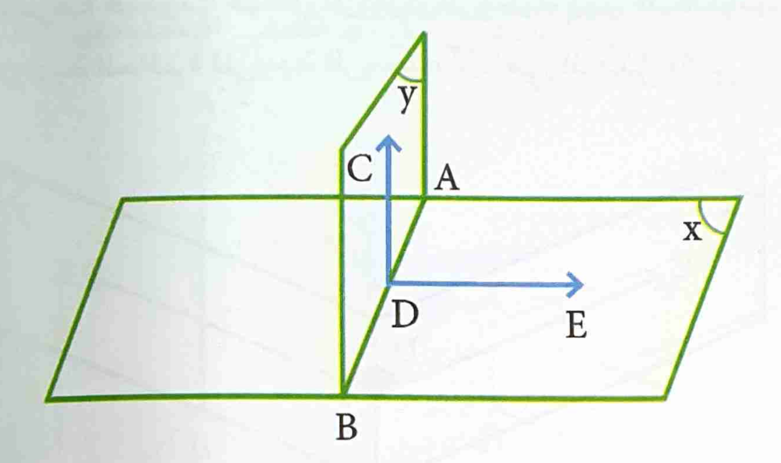
هي الزاوية التي ضلعها عموديان على حرف الزاوية الزوجية من نقطة تنتمي اليه وكل منهما في أحد وجهي الزاوية الزوجية .

1. قياس زاوية عائدة لزاوية زوجية ثابت .
2. قياس الزاوية الزوجية يساوي قياس الزاوية العائدة لها وبالعكس .

> إذا كانت الزاوية الزوجية قائمة فأن المستويين متعامدان وبالعكس .

$$(x)\perp(Y)\ \leftrightarrow\ \text{قياس}\ (x)-\overleftrightarrow{AB}-(Y)=90^\circ$$

مبرهنة (7) إذا تعامد مستويات فالمستقيم المرسوم في أحدهما والعمودي على مستقيم التقاطع يكون عمودياً على المستوي الآخر .



معطيات $(Y) \perp (x)$

$\overleftrightarrow{CD} \subseteq (Y)$

$(Y) \cap (x) = \overleftrightarrow{AB}$

$\overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{AB}$

مطلوب اثباته $\overleftrightarrow{CD} \perp (x)$

البرهان:

في (x) نرسم $\overleftrightarrow{DE} \perp \overleftrightarrow{AB}$ (في المستوي الواحد يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستقيم فيه معلوم من نقطة معلومة) .

$\overleftrightarrow{CD} \subset (Y) , \overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{AB}$ (معطى)

$\therefore \measuredangle CDE$ عائدة للزاوية الزوجية $(Y)-\overleftrightarrow{AB}-(x)$ (تعريف الزاوية العائدة)

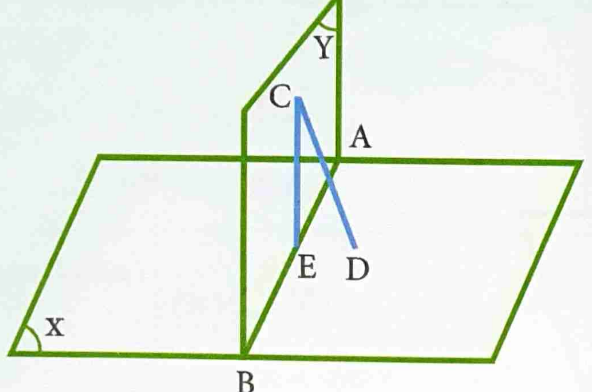
$\therefore \quad m\measuredangle CDE = 90^\circ$ (قياس الزاوية الزوجية يساوي قياس الزاوية العائدة لها وبالعكس) .

$\therefore \quad \overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{DE}$ (إذا كان قياس الزاوية بين مستقيمين 90 فأن المستقيمين متعامدان وبالعكس) .

$\therefore \quad \overleftrightarrow{CD} \perp (x)$ (المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عمودياً على مستويهما) .

و.هـ.م

نتيجة مبرهنة (7) إذا تعامد مستويان فالمستقيم المرسوم من نقطة في أحدهما عمودياً على المستوي الآخر يكون محتوى فيه .



المعطيات/ $(Y) \perp (X)$

$C \in (Y)$

$CD \perp (X)$

م/ اثباته $\overleftrightarrow{CD} \subset (Y)$

البرهان : $(x) \cap (Y) = \overline{AB}$

(يتقاطع مستويان بخط مستقيم)

نرسم $\overline{CE} \subset (Y)$

بحيث $\overline{CE} \perp \overline{AB}$ (في المستوي واحد يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على المستقيم معلوم من نقطة معلومة) .

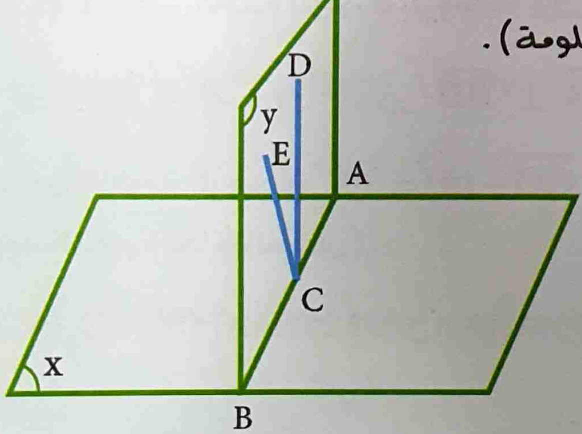
$(Y) \perp (x)$ (معطى)

$\overleftrightarrow{CE} \perp (x)$ **مبرهنة (7)**

(إذا تعامد مستويان فالمستقيم المرسوم في أحدهما وعمودي على مستقيم التقاطع يكون عمودي على المستوي الآخر) .

$\overleftrightarrow{CD} \perp (x)$ (معطى)

$\therefore \overleftrightarrow{CD} = \overleftrightarrow{CE}$ (لايمكن رسم أكثر من عمود واحد على مستو معلوم من نقطة معلومة) .

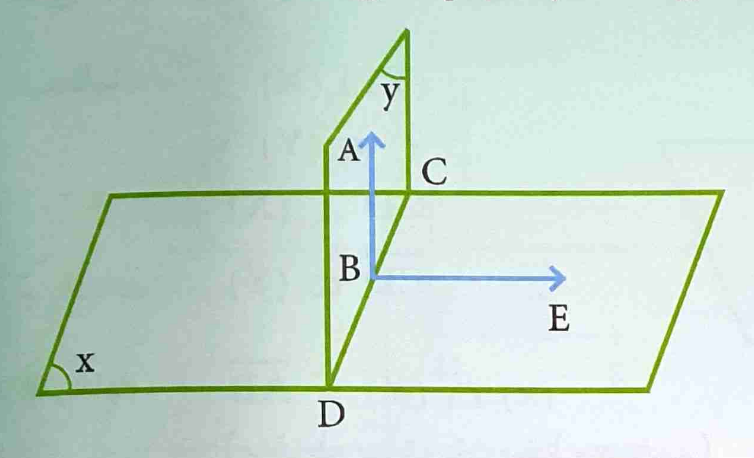


أو

يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستقيم معلوم من نقطة معلومة .

و . هـ . م

مبرهنة 8: كل مستوٍ مار بمستقيم وعمودي على مستوٍ آخر يكون عمودياً على ذلك المستوي أو يتعامد المستويان إذا أحتوى احدهما على مستقيم عمودي على الاخر .



المعطيات/ $\overleftrightarrow{AB} \perp (x)$

$\overleftrightarrow{AB} \subset (Y)$

المطلوب إثباته: $(Y) \perp (x)$

البرهان :

ليكن $\overleftrightarrow{CD} = (Y) \cap (x)$ (يتقاطع المستويان بخط مستقيم) .

$B \in \overleftrightarrow{CD}$ (مستقيم التقاطع يحتوي النقاط المشتركة) .

في (X) نرسم $\overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{BE}$ (في المستوي الواحد يوجد مستقيم وحيد عمودي على مستقيم معلوم من نقطة معلومة) .

$\because \overleftrightarrow{AB} \perp (x)$ (معطى)

$\because \overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}, \overleftrightarrow{BE}$ (المستقيم العمودي على مستوي يكون عمودياً على جميع المستقيمات المرسومة من آثره ضمن ذلك المستو) .

$\because \overleftrightarrow{AB} \subset (Y)$ (معطى)

$\therefore \sphericalangle ABE$ عائدة للزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{CD}$ (تعريف الزاوية العائدة) .

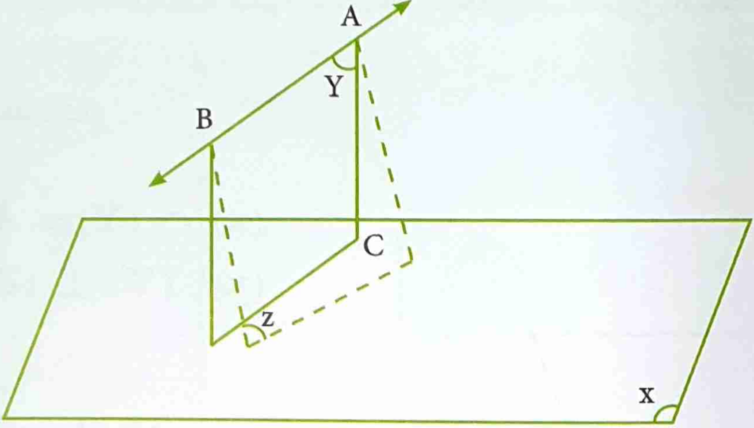
$m\sphericalangle ABE = 90^\circ$ (لأن $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BE}$)

$\therefore$ قياس الزاوية الزوجية $(Y)-\overleftrightarrow{CD}-(x) = 90^\circ$ (قياس الزاوية الزوجية يساوي قياس الزاوية العائدة لها وبالعكس) .

$\therefore (Y) \perp (x)$ (إذا كانت قياس الزاوية الزوجية 90 فأن المستويين متعامدان وبالعكس) .

و . هـ . م

مبرهنة 9: من مستقيم غير عمودي على مستوٍ معلوم يوجد مستوٍ وحيد عمودي على المستوي المعلوم .



المعطيات :

$\overleftrightarrow{AB}$ غير عمودي على (x)

المطلوب اثباته .

إيجاد مستوٍ وحيد يحوي $\overleftrightarrow{AB}$ وعمودي على (x) .

البرهان : من نقطة (A) نرسم $(x) \perp \overleftrightarrow{AC}$ (يوجد مستقيم وحيد عمودي على مستوٍ معلوم من نقطة لا تنتمي إليه) .

$\because$ $\overleftrightarrow{AC}$, $\overleftrightarrow{AB}$ متقاطعان .

$\therefore$ يوجد مستوٍ وحيد مثل (Y) يحويهما (لكل مستقيمين متقاطعين يوجد مستوٍ وحيد تحويهما) .

$\therefore$ $(x) \perp (Y)$ (مبرهنة 8)

ولبرهنة الوحدانية ليكن (Z) مستوي آخر يحوي $\overleftrightarrow{AB}$ وعمودي على (X) .

$\because$ $(x) \perp \overleftrightarrow{AC}$ (بالبرهان)

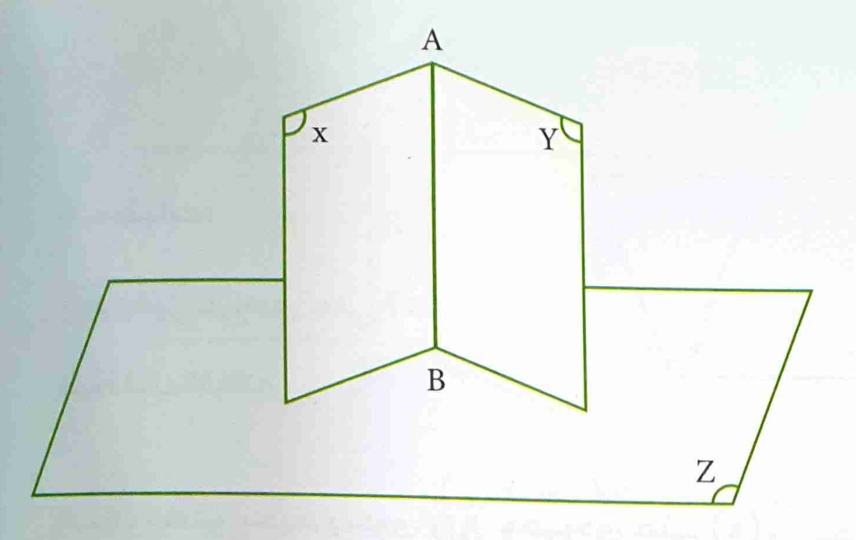
$\therefore$ $(Z) \subset \overleftrightarrow{AC}$ (نتيجة مبرهنة 7)

$\therefore$ $(Z) = (Y)$ (لكل مستقيمين متقاطعين يوجد مستوٍ وحيد يحويهما)

(Y) وحيد

و . هـ . م

نتيجة مبرهنة (9): إذا كان كل من مستويين متقاطعين عمودياً على مستوٍ ثالث فأن مستقيم تقاطعهما يكون عمودياً على المستوي الثالث .



المعطيات :

$(x) \cap (Y) = \overleftrightarrow{AB}$

$(x) , (Y) \perp (Z)$

المطلوب اثباته :

$\overleftrightarrow{AB} \perp (Z)$

البرهان :

إن لم يكن $\overleftrightarrow{AB}$ عمودياً على (Z)

لما وجد أكثر من مستوي يحوي $\overleftrightarrow{AB}$ وعمودي على (Z) (مبرهنة 9)

$$\overleftrightarrow{AB} \perp (Z)$$

و . هـ . م

تمارين (1-6)

س1 : برهن إن مستوى الزاوية المستوية العائدة لزاوية زوجية يكون عمودياً على حرفها.

الحل:

المعطيات:

$(C\ D\ E)$ زاوية عائدة للزاوية الزوجية

$(x) - \overline{AB} - (Y)$

المطلوب: $(C\ D\ E) \perp \overline{AB}$

البرهان: $\overline{CD} \perp \overline{AB}$

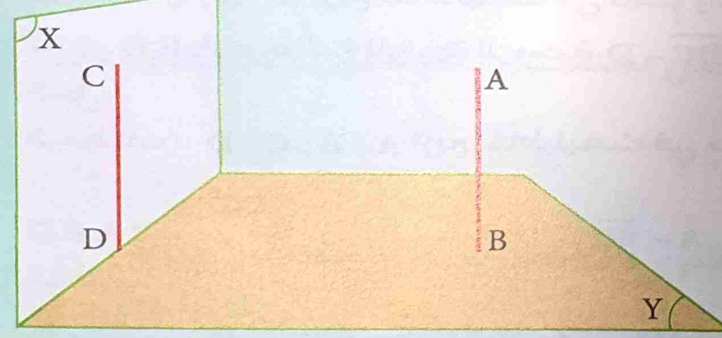
$\overline{ED} \perp \overline{AB}$ [تعريف الزاوية العائدة]

$(C\ D\ E) \perp \overline{AB}$

(المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عمودياً على مستويهما).

و. هـ. م

س2: برهن إنه إذا وازى مستقيم مستوياً وكان عمودياً على مستوى آخر فأن المستويين متعامدان.



الحل:

المعطيات: $\overline{AB} \parallel (x)$

$\overline{AB} \perp (Y)$

المطلوب: $(x) \perp (Y)$

البرهان: لتكن $C \in (x)$

نرسم $\overline{CD} \perp (Y)$

(يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستوٍ معلوم من نقطة معلومة)

$\because$ $\overline{AB} \perp (Y)$ (معطى) $\rightarrow \overline{AB} \parallel \overline{CD}$

$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

المستقيمان العموديان على مستوٍ واحد متوازيان).

$C \in (x) \rightarrow \overline{CD} \subset (x)$

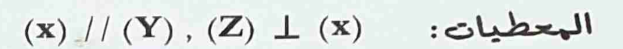
(إذا وازى مستقيم مستوياً فالمستقيم المفهوم من نقطة في المستوي وموزياً للمستقيم المعلوم يكون محتوى في المستوي).

$(x) \perp (Y)$ (مبرهنة 8)

و. هـ. م

س3 : برهن إن المستوي العمودي على أحد مستويين يكون عمودياً على الآخر أيضاً .

الحل :



المعطيات : $(x) // (Y)\ ,\ (Z) \perp (x)$

المطلوب : $(Z) \perp (Y)$

البرهان : ليكن $\overline{AB} = (Z) \cap (x)$

(إذا تقاطع مستويان فأن مجموعة التقاطع مستقيم)

لتكن $C \in Z$ ، نرسم $\overline{CD} \subset (Z)$ بحيث $\overline{CD} \perp \overline{AB}$

(في المستوي الواحد : يمكن رسم مستقيم واحد فقط عمودي على مستقيم معلوم من نقطة معلومة) .

(مبرهنة 7) $(Z) \perp (x)$ (معطى) $\rightarrow \overline{CD} \perp (x)$

$(x) // (Y)$ (معطى) $\rightarrow \overline{CD} \perp (y)$

(المستقيم العمودي على أحد مستويين متوازيين يكون عمودياً على الآخر)

(مبرهنة 8) $\therefore (Z) \perp (Y)$

و . هـ . م

س4: $A\ ,\ B\ ,\ C\ ,\ D$ أربع نقاط ليست في مستوٍ واحد بحيث $AB = AC\ ,\ E \in \overline{BC}$ فأذا كانت $\measuredangle AED$ عائدة للزاوية الزوجية $A - \overline{BC} - D$ برهن ان $CD = BD$

الحل

المعطيات : $A\ ,\ B\ ,\ C\ ,\ D$ أربع نقاط ليست في مستوٍ واحد .

$E \in \overline{BC}\ ,\ AB = AC$

$\measuredangle AED$ عائدة للزاوية الزوجية $A - \overline{BC} - D$

المطلوب : $CD = BD$

البرهان : في $\triangle ABC$ $AB = AC$ (معطى)

$\because \overline{AE} \perp \overline{BC}$ (تعريف العائدة)

$\therefore E$ منتصف $\overline{BC}$

(العمود لمرسوم من رأس مثلث متساوي الساقين على القاعدة ينصفها) .

في المثلثين $CED\ ,\ BED$

$\overline{DE}$ (مشترك)

$CE = BE$ (بالبرهان)

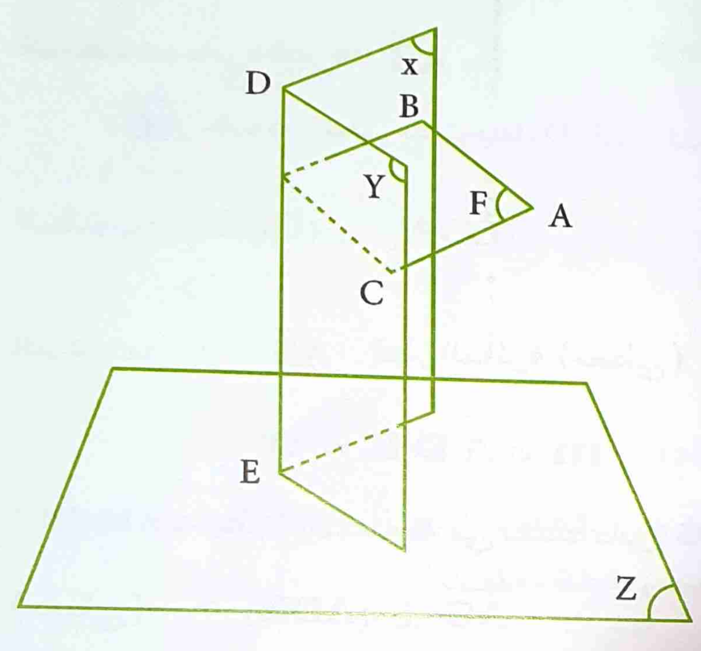
$\measuredangle CED = \measuredangle BED$ قوائم (تعريف العائدة)

يتطابق المثلثان (لتساوي ضلعين والزاوية المحصورة بينهما)

وينتج $CD = BD$

و . هـ . م

س5: برهن إذا وازى كل من مستقيمين متقاطعين مستوياً معلوماً وكانا عمودين على مستويين متقاطعين فان مستقيم تقاطع المستويين المتقاطعين يكون عمودياً على المستوي المعلوم.



الحل:

المعطيات: $\overline{AB}\ ,\ \overline{AC}\ //\ (Z)$

$\overline{AB}\perp(x)\ ,\ \overline{AC}\perp(Y)\ ,\ (x)\cap(Y)=\overline{DE}$

المطلوب: $\overline{DE}\ \perp\ (Z)$

البرهان: $\overline{AB}\ ,\ \overline{AC}$ متقاطعان

يوجد مستوٍ وحيد يحويهما مثل (F) (لكل مستقيمين متقاطعين يوجد مستوٍ وحيد يحويهما).

$\therefore\ \ (F)\ //\ (Z)$

(إذا وازى كل من مستقيمين متقاطعين مستوياً فأن مستويهما يوازي ذلك المستوي)

$\because\ \ \overline{AB}\ ,\ \perp\ (x)$ (معطى) $\rightarrow (F)\ \perp(x)$ مبرهنة 8

$\because\ \ \overline{AC}\perp(Y)$ (معطى) $\rightarrow (F)\perp(Y)$ مبرهنة 8

$\because\ \ \overline{DE}\perp(F)$ نتيجة مبرهنة 9

$DE\ \perp\ (Z)$ (المستقيم العمودي على أحد مستويين متوازيين يكون عمودياً على الآخر).

و.هـ.م

س6: دائرة قطرها عمودي على مستويها، D نقطة تنتمي للدائرة، برهن إن (CDA) (CDB).

الحل:

المعطيات: دائرة قطرها $\overline{AB}$

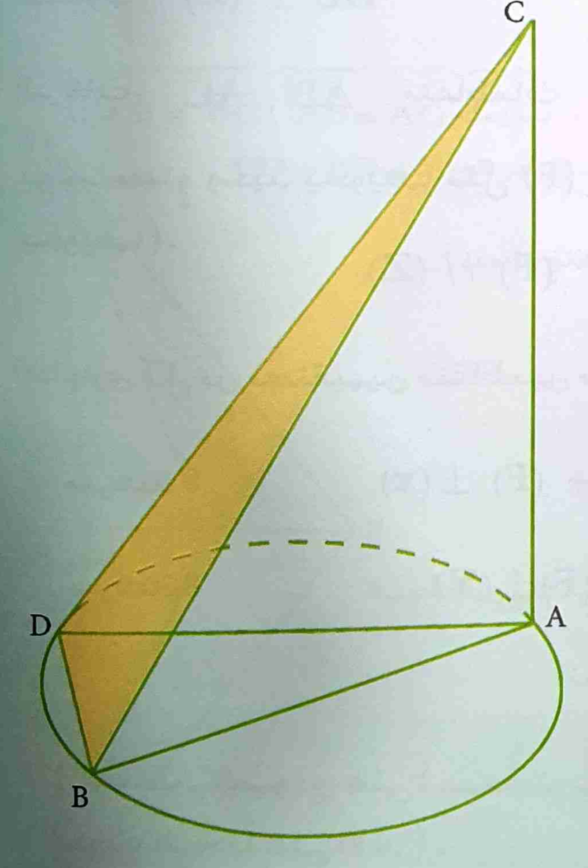
$\overline{AC}$ عمودي على مستويها، D نقطة تنتمي للدائرة.

المطلوب: $(CDA) \perp (CDB)$

البرهان: $\because$ $\overline{AB}$ قطر الدائرة (معطى)

$$m \sphericalangle ADB = 90^\circ$$

(الزاوية المحيطية المرسومة في نصف دائرة قائمة)



$\because$ $\overline{AC} \perp (ADB)$ (معطى)

$\overline{AD} \perp \overline{DB}$ بالبرهان

$\overline{CD} \perp \overline{DB}$ مبرهنة الاعمدة الثلاثة

$\therefore$ $\overline{DB} \perp (CDA)$

(المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عمودياً على مستويهما).

$\therefore$ $(CDA) \perp (CDB)$ (مبرهنة 8)

و.هـ.م

مثال (1)

في $\triangle ABC$

$\overline{BD} \perp (ABC)$, $m \measuredangle A = 30^\circ$

$AB = 10cm$, $BD = 5cm$

جد قياس الزاوية الزوجية

$D - \overline{AC} - B$

المعطيات

$AB = 10cm$, $BD = 5cm$

$\overline{BD} \perp (ABC)$, $m \measuredangle BAC = 30^\circ$

المطلوب اثباته:

إيجاد قياس الزاوية الزوجية $D - \overline{AC} - B$

في المستوي (ABC) نرسم $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ في نقطة E (في المستوي الواحد يوجد مستقيم وحيد عمودي على مستقيم معلوم من نقطة معلومة).

$\because$ $\overline{BD} \perp (ABC)$ (معطى)

$\therefore$ $\overline{DE} \perp \overline{AC}$ (مبرهنة الاعمدة الثلاثة)

$\measuredangle DEB$ عائدة للزواية الزوجية $\overline{AC}$ (تعريف الزاوية العائدة)

$\overline{DB} \perp \overline{BE}$ (المستقيم العمودي على مستوي يكون عمودياً على جميع المستقيمات المرسومة من اثره ضمن ذلك المستو).

$\triangle DBE$ قائم الزاوية في B

في $\triangle BED$ القائم الزاوية في E

$$\sin 30^\circ = \frac{BE}{BA} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{BE}{10} \rightarrow BE = 5cm$$

في $\triangle DBE$ القائم الزاوية في B:

$\therefore$ قياس $m \measuredangle BED = 45^\circ \leftarrow \tan \measuredangle BED = \frac{5}{5} = 1$

$\therefore$ قياس الزاوية الزوجية $D - \overline{AC} - B = 45^\circ$ (قياس الزاوية الزوجية هو قياس الزاوية العائدة لها وبالعكس).

و.هـ.م



مثال (2)

ليكن ABC مثلثاً وليكن

$\overline{AF} \perp (ABC)$

$\overline{BD} \perp \overline{CF}$

$\overline{BE} \perp \overline{CA}$

برهن أن $\overline{BE} \perp (CAF)$

$\overline{ED} \perp \overline{CF}$

المعطيات $\overline{AF} \perp (ABC)\,,\ \overline{BE} \perp \overline{AC}\,,\ \overline{BD} \perp \overline{CF}$

المطلوب إثباته: $\overline{DE} \perp \overline{CF}\,,\ \overline{BE} \perp (CAF)$

البرهان: $\because$ $\overline{AF} \perp (ABC)$ (معطى)

$\therefore$ $(CAF) \perp (ABC)$ (مبرهنة 8: يتعامد المستويات إذا احتوى احدهما على مستقيم عمودي على الآخر).

$\because$ $\overline{BE} \perp \overline{AC}$ (معطى)

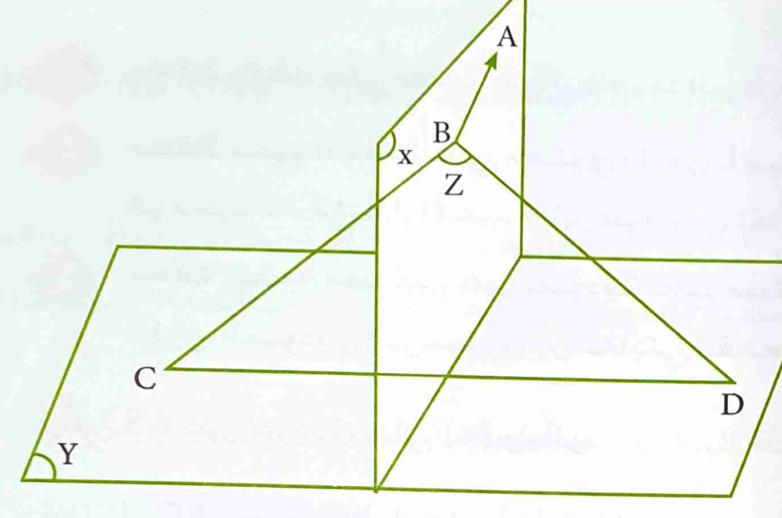
$\therefore$ $\overline{BE} \perp (CAF)$ (مبرهنة 7): إذا تعامد مستويان فالمستقيم المرسوم في أحدهما والعمودي على مستقيم التقاطع يكون عمودياً على الآخر).

$\overline{BD} \perp \overline{CF}$ (معطى)

$\overline{ED} \perp \overline{CF}$ نتيجة مبرهنة الأعمدة الثلاثة

و . هـ . م

مثال (3) (y) , (x) مستويات متعامدان



$\overleftrightarrow{AB} \subset (x)$

$\overleftrightarrow{BD}$, $\overleftrightarrow{BC}$ عموديان على $\overleftrightarrow{AB}$

ويقطعان (Y) في $C،D$ على الترتيب .

برهن إن: $\overleftrightarrow{CD} \perp (x)$

المعطيات: $(x)\perp(Y)$, $\overleftrightarrow{AB} \subset (x)$, $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BD}$, $\overleftrightarrow{BC}$ عمودي على $\overleftrightarrow{AB}$ ويقطعان (Y) في C , D على الترتيب .

المطلوب اثباته: $\overleftrightarrow{CD} \perp (x)$

البرهان : ليكن (Z) مستوي المستقيمين المتقاطعين $\overleftrightarrow{BD}$, $\overleftrightarrow{BC}$ (لكل مستقيمين متقاطعين يوجد يوجد مستوياً وحيداً يحويهما) .

بما إن $\overleftrightarrow{BD}$, $\overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{AB}$ (معطى)

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AB} \perp (Z)$

(المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عمودياً على مستويهما)

$\because$ $\overleftrightarrow{AB} \subset (x)$ (معطى)

$\therefore$ $(Z) \perp (x)$ (يتعامد المستويان إذا إحتوى أحدهما على مستقيم عمودي على الاخر) .

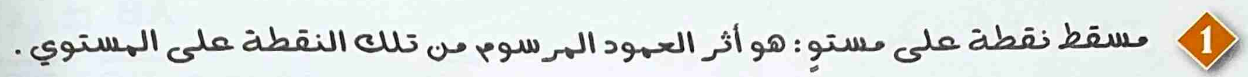
$\because$ $(Y) \perp (x)$ (معطى)

ولما كان $\overleftrightarrow{CD} = (Y) \cap (Z)$ (لانه محتوى في كل منهما) .

$\therefore$ $(x) \perp \overleftrightarrow{CD}$

(إذا كان كل من مستويين متقاطعين عمودياً على مستوٍ ثالث فأن مستقيم تقاطعهما يكون عمودياً على المستوي الثالث) .

و . هـ . م



الاسقاط العمودي على مستوٍ

1. مسقط نقطة على مستوٍ: هو أثر العمود المرسوم من تلك النقطة على المستوي.

2. مسقط مجموعة نقط على مستوي: لتكن L مجموعة من نقاط في الفراغ فأن مسقطها هو مجموعة كل أثار الأعمدة المرسومة من نقاطه على المستوي.

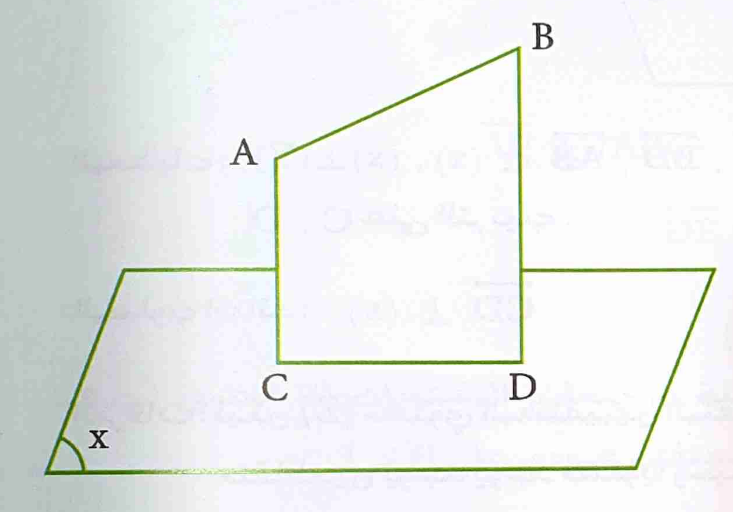
3. مسقط قطعة مستقيم غير عمودية على مستوٍ معلوم: هو قطعة المستقيم المحدودة بأثري العمودين المرسومين من نهايتي القطعة على المستوي المعلوم.

ليكن AB غير عمودي على (x) وليكن

$(x) \perp \overline{AC} \leftarrow$ مسقط A على (x) هو C

$(x) \perp \overline{BD} \leftarrow$ مسقط B على (x) هو D

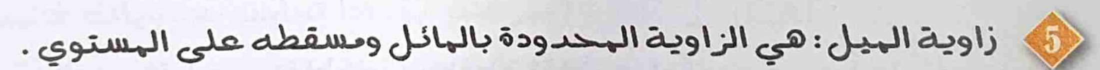
$\therefore$ مسقط $\overline{AB}$ على (x) هو $\overline{CD}$



ملاحظة

إذا كان $\overline{AB} \parallel (x)$

فأن $AB = CD$



4. المستقيم المائل على مستوٍ: هو المستقيم غير العمودي على المستوي وقاطع له.

5. زاوية الميل: هي الزاوية المحدودة بالمائل ومسقطه على المستوي.

ليكن $\overline{AB}$ مائلاً على (x) في B

وليكن $(x) \perp \overline{AC}$ في C

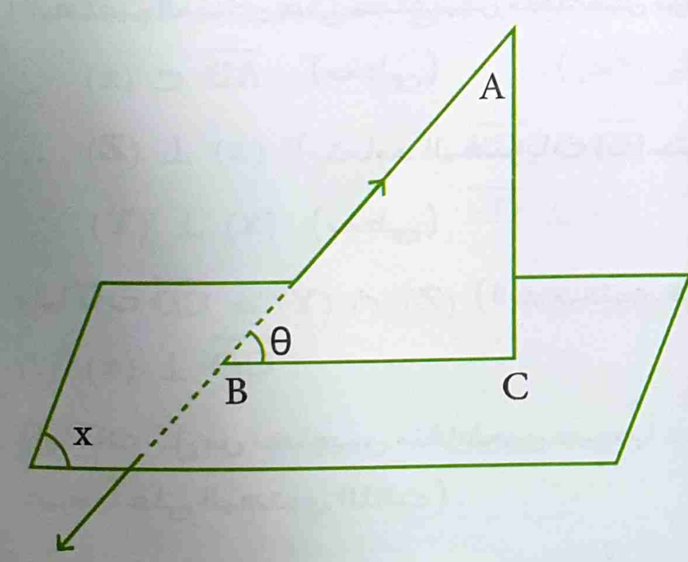
$\therefore$ C مسقط A على (x) حيث $A \notin (x)$

كذلك B مسقط نفسها حيث $B \in (x)$

$\leftarrow$ $\overline{BC}$ مسقط $\overline{AB}$ على (x)

أي إن $0 < \theta < 90°$

$\theta \in (0, 90°)$





6. طول المسقط : طول نسقط قطعة مستقيم على مستوٍ = طول المائل × جيب تمام زاوية الميل .

فعندما تكون $\overline{AB}$ مائلاً على (x) وزاوية ميله θ ومسقطه $\overline{BC}$ فأن $BC = AB\cos\theta$

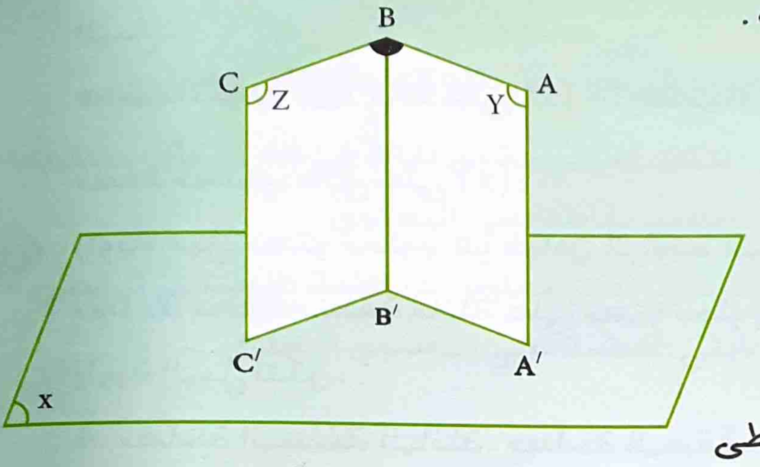
مسقط مستوي مائل على (x) :

7. زاوية ميل مستوٍ معلوم هو قياس الزاوية المستوية العائدة للزاوية الزوجية بينهما مساحة مسقط منطقة مائلة على مستوٍ معلوم = مساحة المنطقة المائلة × جيب تمام زاوية الميل لتكن :

A مساحة المنطقة المائلة، مساحة المسقط، قياس زاوية الميل $A' = A\cos\theta$

الرياضيات

مثال (4) إذا وازى احد ضلعي زاوية قائمة مستوياً فأن مسقطي ضلعيها على المستوي متعامدان .



المعطيات: $\measuredangle ABC$ قائمة في B

$\overline{AB} \,//\, (x)$,

$\overline{A'B'}$ هو مسقط $\overline{AB}$ على (x)

$\overline{B'C'}$ هو مسقط $\overline{BC}$ على (x)

المطلوب اثباته: $\overline{B'C'} \perp \overline{A'B'}$

البرهان: $\overline{A'B'}$ مسقط $\overline{AB}$ ، $\overline{B'C'}$ مسقط $\overline{BC}$ معطى

$\overline{AA'} , \overline{BB'} , \overline{CC'} \perp (x)$ (مسقط قطعة مستقيم على مستوٍ معلوم هو القطعة المحددة بأثري العمودين المرسومين على المستوي من طرفي القطعة المستقيمة) .

$\overline{AA'} \,//\, \overline{BB'}$, $\overline{BB'} \,//\, \overline{CC'}$ (المستقيمان العموديان على مستوٍ واحد متوازيان) .

بالمستقيمين المتوازيين $\overline{BB'}$, $\overline{AA'}$ نعين (Y)
بالمستقيمين المتوازيين $\overline{CC'}$, $\overline{BB'}$ نعين (Z)
(لكل مستقيمين متوازيين يوجد مستوٍ وحيد يحويهما) .

لكن $\overline{AB} \,//\, (x)$ (معطى)

$(Y) \cap (x) = \overline{A'B'}$ (يتقاطع مستويان بخط مستقيم) .

$\overline{AB} \,//\, \overline{A'B'}$ (إذا وازى مستقيم مستوياً معلوماً فأنه يوازي جميع المستقيمات الناتجة من تقاطع هذا المستوي والمستويات التي تحوي المستقيم) .

كذلك $\overline{A'B'} \perp \overline{BB'}$ (المستقيم العمودي على مستوي يكون عمودياً على جميع المستقيمات المرسومة من أثره ضمن ذلك المستوي) .

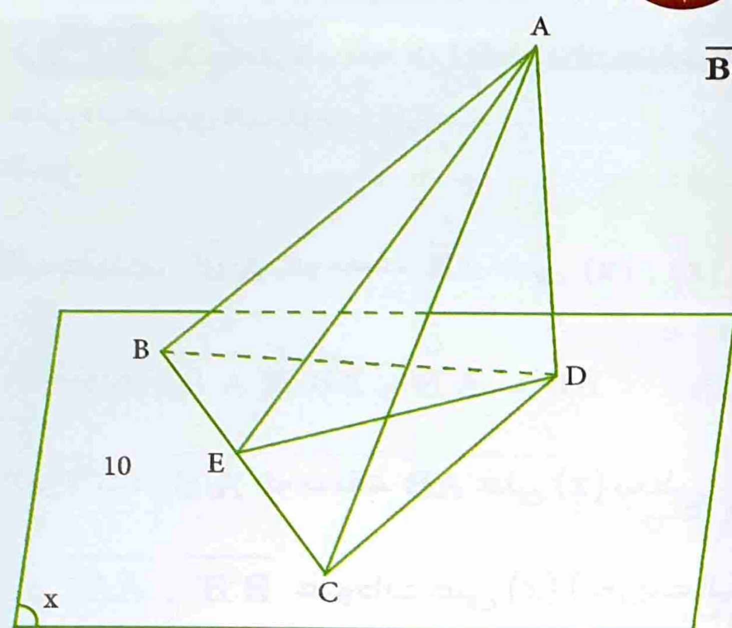
$\overline{BB'} \perp \overline{AB}$ (في المستوي الواحد: المستقيم العمودي على أحد مستقيمين متوازيين يكون عمودياً على الآخر) .

لكن $\overline{BC} \perp \overline{AB}$ (لأن $M\measuredangle ABC = 90°$ معطى)

$\overline{AB} \perp (Z)$ (المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عمودياً على مستويهما) .

$\overline{A'B'} \perp (Z)$ (المستوي العمودي على أحد مستقيمين متوازيين يكون عمودياً على الآخر) .

$\therefore \overline{B'C'} \perp \overline{A'B'}$ (المستقيم العمودي على مستوي يكون عمودياً على جميع المستقيمات المرسومة من أثره ضمن ذلك المستوي) .



مثال (5) $\overline{BC} \subset (x)$, مثلث ABC
والزاوية الزوجية بين مستوي المثلث
ABC والمستوي (x)
قياسها $60°$ فأذا كان :
$AB = AC = 13cm$, $BC = 10cm$
جد مسقط المثلث (ABC) على (x)
ثم جد مساحة مسقط $\triangle ABC$ على (x)

المعطيات : $\triangle ABC$, $\overline{BC} \subset (x)$
$M \measuredangle \triangle ABC - BC - (x) = 60°$
$AB = AC = 13$, $BC = 10$

المطلوب إثباته : ايجاد مسقط $\triangle ABC$ على (x) وايجاد مسافة مسقط $\triangle ABC$ على (x) .

البرهان : نرسم $\overline{AD} \perp (x)$ في D (يمكن رسم عمود على مستوي من نقطة معلومة) .

$\therefore$ $\overline{CD}$ مسقط $\overline{AC}$
$\overline{BD}$ مسقط $\overline{AB}$
BC مسقط نفسه على (x) .
(مسقط قطعة مستقيم على مستوٍ معلوم هو القطعة المحدودة بأثري العمودين المرسومين على المستوي من طرفي القطعة المستقيمة) .

$\therefore$ $\triangle BCD$ مسقط $\triangle ABC$ على (x)

من (ABC) نرسم $\overline{AE} \perp \overline{BC}$ في E (في المستوي الواحد يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستقيم معلوم من نقطة معلومة) .

وبما إن $AC = AB$ (معطى)

$\therefore$ $EC = BE = 5cm$ (العمود النازل من رأس مثلث متساوي الساقين على القاعدة ينصفها) .

$\therefore$ $\overline{ED} \perp \overline{BC}$ (نتيجة مبرهنة الأعمدة الثلاثة) .

$\therefore$ $\measuredangle DEA$ عائدة للزوجية $\overline{BC}$ (تعريف الزاوية العائدة) .

لكن قياس الزاوية الزوجية $\overline{BC} = 60°$ (معطى)

في $\triangle AEB$ القائم في E

$AE = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12\ cm$

في $\triangle AED$ القائم في D

$\cos 60° = \frac{BD}{AE} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{ED}{12} \rightarrow ED = 6cm$

مساحة المثلث BCD $= \frac{1}{2} \times 10 \times 6 = 30\ cm^2$

سؤال 1 برهن أن طول قطعة المستقيم الموازي لمستوٍ معلوم يساوي طول مسقطه على المستوي المعلوم ويوازيه .

الحل

المعطيات: $\overline{A'B'}$ هو مسقط $\overline{AB}$ على (x) , (x) // $\overline{AB}$

المطلوب: $\overline{A'B'}$ // $\overline{AB}$, $AB = A'B'$

البرهان: $\overline{A'B'}$ هو مسقط AB على (x) معطى

$\therefore$ $\overline{AA'}$, $\overline{B'B'}$ عمودان على (x) (تعريف المسقط)

$\therefore \overline{AA'} \ // \ BB'$

(المستقيمان العموديان على مستوٍ واحد متوازيان)

نعين المستوي (Y) بالمستقيمين المتوازيين $\overline{BB'}$, $\overline{AA'}$ $\therefore$

(لكل مستقيمين متوازيين يوجد مستوٍ وحيد يحويهما)

$\because \overline{AB} \ // \ (x)$ (معطى)

$\overline{AB} \ // \ \overline{A'B'}$

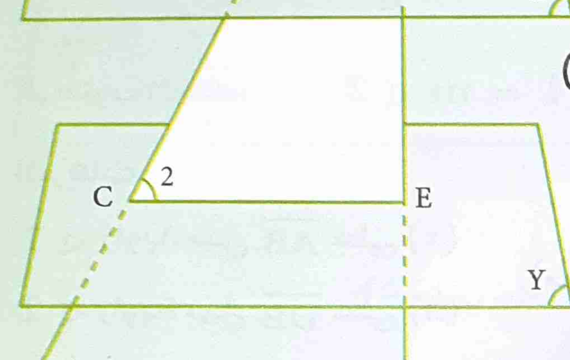
(إذا وازى مستقيم مستوياً فأنه يوازي جميع المستقيمات الناتجة من تقاطع هذا المستوي مع المستويات التي تحوي هذا المستقيم) .

$\therefore$ $A\,B\,B'A'$ متوازي أضلاع (لتوازي كل ضلعين متقاطعين فيه)

(يتساوى طولا الضلعين المتقابلين في متوازي الأضلاع) $\therefore AB = A'B'$

و . هـ . م

سؤال 2 برهن إن قطع مستويان متوازيان بمستقيم فأن ميله على أحدهما يساوي ميله على الآخر .



الحل:

المعطيات: $(Y) // (x)$, $\overline{AC}$ يقطع (x) في نقطة B ويقطع (Y) في نقطة C

المطلوب: ميل $\overline{AC}$ على (x) = ميل $\overline{AC}$ على (Y)

البرهان: نرسم $\overline{AD} \perp (x)$ (يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستوي من نقطة معلومة) .

$\therefore$ $\overline{AD} \perp (Y)$ في E

(المستقيم العمودي على احد مستويين متوازيين يكون عمودياً على الآخر)

$\therefore$ $\overline{BD}$ هو مسقط $\overline{AB}$ على (x)

(تعريف مسقط قطعة مستقيم)

$\overline{CE}$ هو مسقط $\overline{AC}$ على (Y)

$\measuredangle 1$ هي زاوية ميل $\overline{AB}$ على (x)

(زاوية الميل: هي الزاوية المحددة بالمائل ومسقطة على المستوي)

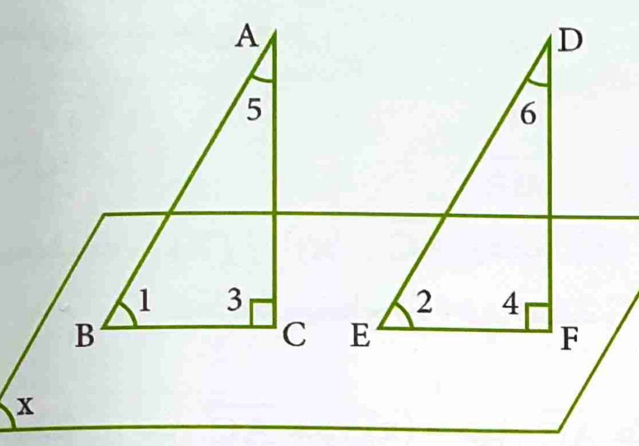
$\measuredangle 2$ هي زاوية ميل $\overline{AC}$ على (Y)

$m\measuredangle 1 = m\measuredangle 2$ (متناظرة)

ميل $\overline{AC}$ على (x) = ميل $\overline{AC}$ على (Y)

و . هـ . م

سؤال 3 برهن على ان للمستقيمات المتوازية المائلة على مستوي الميل نفسه .



الحل

$\overline{AB} \,//\, \overline{DE}$

$1 \measuredangle$ زاوية ميل $\overline{AB}$ على (x)

$2 \measuredangle$ زاوية ميل $\overline{DE}$ على (x)

المطلوب اثباته: $m\measuredangle 1 = m\measuredangle 2$

البرهان:

$1 \measuredangle$ زاوية ميل $\overline{AB}$ على (x)

$2 \measuredangle$ زاوية ميل $\overline{DE}$ على (x) (معطى)

$\overline{BC}$ مسقط $\overline{AB}$ على (x) (زاوية ميل مستقيم على مستوٍ هي الزاوية المحددة

$\overline{EF}$ مسقط $\overline{DE}$ على (x) بالمائل ومسقطة على المستو)

$\therefore \overline{AC} \perp (x)$ (تعريف مسقط قطعة المستقيم غير عمودية على مستو)

$\therefore \overline{DF} \perp (x)$

$\therefore \overline{AC} \perp \overline{BC}$ (المستقيم العمودي على مستوي يكون عمودياً على جميع المستقيمات

$\therefore \overline{DF} \perp \overline{EF}$ المرسومة من أثره ضمن ذلك المستو)

$m\measuredangle 3 = m\measuredangle 4$ (قوائم)

$\overline{AB} \,//\, \overline{DE}$ (معطى)

$\overline{AC} \,//\, \overline{DF}$ (المستقيمان العموديان على مستوٍ واحد متوازيان)

$m\measuredangle 5 = m\measuredangle 6$ إذا وازى ضلعا زاوية ضلعي زاوية أخرى تساوى قياسهما

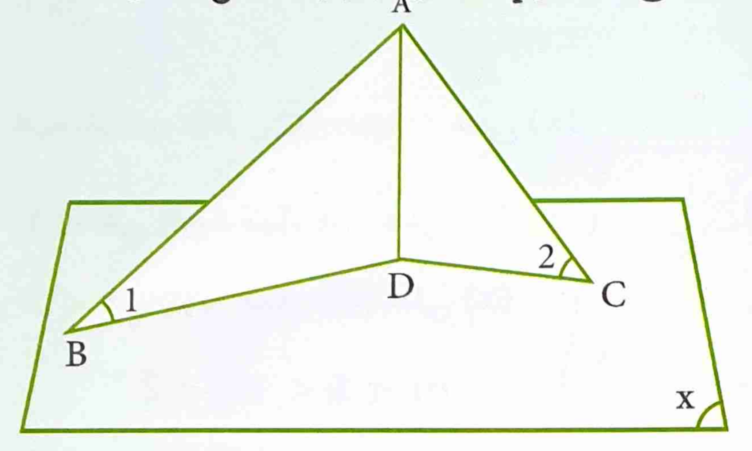
$m\measuredangle 1 = m\measuredangle 2$ (مجموع زوايا المثلث 180)

و . هـ . م

سؤال 4 برهن على انه إذا رسم مائلان مختلفان في الطول من نقطة لا تنتمي الى مستوٍ معلوم فأن اطولهما تكون زاوية ميله على المستوي أصغر من زاوية ميل الآخر عليه .



الحل



المعطيات: $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ مائلان على (x) .

$AB > AC$

المطلوب: زاوية ميل $\overline{AB}$ على (x) أصغر من زاوية ميل $\overline{AC}$ على (x) .

البرهان: نرسم (x) $\perp$ $\overline{AD}$

(يمكن رسم عمود واحد فقط على مستوٍ من نقطة معلومة)

فيكون $\overline{BD}$ هو مسقط $\overline{AB}$ على (x)

$\overline{CD}$ هو مسقط $\overline{AC}$ على (x)

(مسقط قطعة مستقيم غير عمودي على مستوي هو قطعة المستقيم الواصلة بين أثري العمودين المرسومين من طرفي القطعة على المستوي)

$\measuredangle 1$ هي زاوية ميل $\overline{AB}$ على (x)

$\measuredangle 2$ هي زاوية ميل $\overline{AC}$ على (x)

(زاوية الميل: هي الزاوية المحددة بالمائل ومسقطه على المستوي)

$\because AB > AC$ (معطى)

$\frac{1}{AB} < \frac{1}{AC}$ (خ ص التباين)

$\frac{AD}{AB} < \frac{AD}{AC}$ زوايا حادة $\measuredangle 1 , \measuredangle 2$

$\sin\measuredangle 1 < \sin\measuredangle 2$ $\therefore m\measuredangle 1 < m\measuredangle 2$

سؤال 5 برهن على انه إذا رسم مائلات من نقطة ما إلى مستو فأصغرهما ميلاً هو الأطول .

الحل

المعطيات : $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ مائلان على (x)

$\measuredangle 1$ هي زاوية ميل $\overline{AB}$ على (x)

$\measuredangle 2$ هي زاوية ميل $\overline{AC}$ على (x)

$m\measuredangle 1 < m\measuredangle 2$

المطلوب : $AB > AC$

البرهان : $\because$ $\measuredangle 1$, $\measuredangle 2$ هما زاويتي ميل $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ على (x) على الترتيب .

$\therefore$ $\overline{BD}$ هو مسقط $\overline{AB}$ على (x)

$\overline{CD}$ هو مسقط $\overline{AC}$ على (x)

(زاوية ميل مستقيم على مستوي هي الزاوية المحددة بالمائل ومسقطه على المستوي)

نرسم $\overline{AD} \perp (x) \quad \therefore$

(مسقط قطعة مستقيم غير عمودية على مستوي هي قطعة المستقيم المحددة بين أثري العمودين المرسومين من طرفي تلك القطعة على المستوي)

$\therefore \ \overline{AD} \perp \overline{BD}\ ,\ \overline{CD}$

(المستقيم العمودي على مستوي يكون عمودياً على جميع المستقيمات المرسومة من اثره في ذلك المستوي)

$\because \ m\measuredangle 1 < m\measuredangle 2$ (معطى)

$\therefore \ \sin\measuredangle 1 < \sin\measuredangle 2$

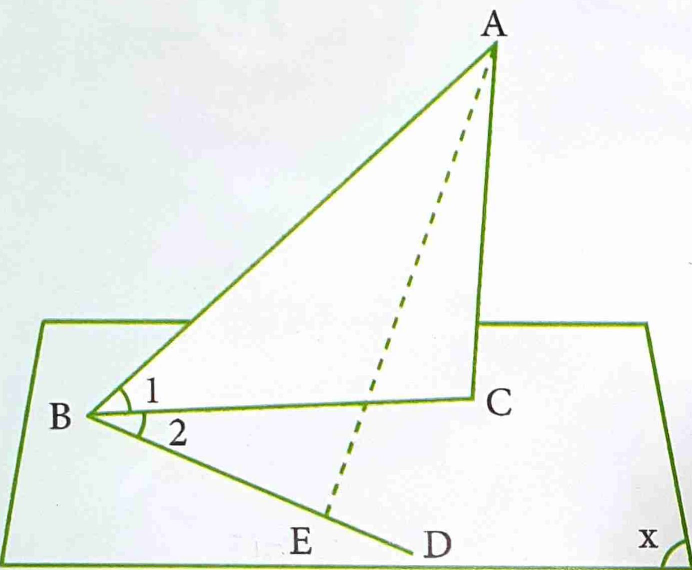
$\frac{AD}{AB} < \frac{AD}{AC} \rightarrow \frac{1}{AB} < \frac{1}{AC} \rightarrow AB > AC$ (خواص التباين)

و.هـ.م



سؤال 6 برهن على أن الميل بين المستقيم ومسقطه على مستوٍ أصغر من الزاوية المحصورة بين المستقيم نفسه وأي مستقيم آخر مرسوم من موقعه ضمن ذلك المستوي .

الحل



المعطيات: ليكن $\overline{BC}$ مسقط $\overline{AB}$ على (x)

$\measuredangle ABC$ زاوية ميل، $\overline{BD} \subset (x)$

المطلوب: $m\measuredangle ABC < m\measuredangle ABD$

البرهان: لتكن $E \in \overline{BD}$

بحيث $BC = BE$

نصل $\overline{AE}$

$\because \overline{AC} \perp (x)$ (تعريف المسقط)

$\overline{AC} < \overline{AE}$ (العمود: هو أقصر مسافة بين نقطة ومستوي)

فيهما $\triangle\triangle\ ABC , ABE$

$BC = BE$ (بالعمل) و $AB = AB$ (ضلع مشترك)

$\therefore\ m\measuredangle 1 < m\measuredangle 2$

(إذا تساوى ضلعا مثلث ضلعي مثلث آخر واختلف الضلعان الآخران فأصغرهما يقابل أصغر الزاويتين)

و.هـ.م

الأستاذ

حيدر وليد

07701780364



2021

الرياضيات



ثلاث فصول





ملازم
دار المغرب



mlazmna



المسند في الرياضيات

الجزء الأول

السادس الاحيائي

1 الأعداد المركبة

2 القطوع المخروطية

6 الهندسة الفضائية

هام للغاية

كل نسخة لا تحمل جلدة دائرية على وجه الغلاف تعتبر مزورة



صفحة ملازم دار المغرب

المركز الرئيسي مطبعة المغرب 07702729223

جانب الرصافة

المكتبة	الهاتف
مكتبة سرمد الأشقر - ش الربيعي	07705312272
مكتبة المستنصرية - ش فلسطين	07733334104
مكتبة فاضل الوكيل - سوق السراي	07732545553
مكتبة اغادير - الغدير	07711438143
مكتبة التاج - بغداد الجديدة	07708813122
مكتبة طه - مدينة الصدر	07719018916
مكتبة النوارس - الأعظمية	07702808414
مكتبة الكوثر - ش المتنبي	07901307808
مكتب الصباح - الأعظمية	07712617954
مكتبة دار دور- زيونة	07705319230
مكتبة المواهب - كرادة داخل	07707118111
مكتبة النبع - البنوك - ش الجسر الجديد	07709936949
مكتبة الفاضل - شارع المتنبي	07901292023
مكتبة نور الدين - فلكة صباح الخياط	07702873687
مكتبة الريحاني رياض - زيونة - قرب دار الازياء	07700182381
مكتبة المحترف - جسر ديالى - ش الاطفاء	07700682020
مكتبة الصافي - بغداد الجديدة - الامين الثانية	07715592207
مكتبة كشكول - سبع ابكار مدخل سوق السمكة	07707188989
مكتبة الفرسان - حي البنوك	07704530191
مكتبة سعودي - المشتل - الشارع العام	07733361889
مكتبة الزهور - بغداد الجديدة - نواب الضباط	07717776160
مكتبة المتنبي - البلديات	07700700194
مكتبة الخليج - بغداد الجديدة - الشارع العام	07737937330
مكتبة السماء الزرقاء - الغدير - ساحة ميسلون	07728006098
مكتبة المتنبي - الصليخ - الشارع العام	07710552199
مكتبة الكرادة - كرادة داخل	07704356665
مكتبة بغداد - المشتل - شارع المطبك	07712294919
مكتبة الصليخ الجديد - الصليخ	07702474058
مكتبة يونس - الزعفرانية - الاربع شوارع	07701467104
مكتبة النسيم - الكريعات - قرب المركز الصحي	07901147396

مندوبنا في بغداد

لتسويق الملازم للمكتبات

07711130300

ملاحظة: الوكلاء الرئيسيين في بغداد لبيع الجملة للمكتبات والمفرد للطلاب

المؤشر اسمهم باللون الاحمر هو وكيل رئيسي في بغداد

المكتبة	الهاتف
مكتبة الجوهرة في البنوك	07702538881
مكتبة حسن المهندس - بغداد الجديدة - النعيرية	07715884036
مكتبة الشموس - حي اور	07715566655
مكتبة العهد - مدينة الصدرداخل - قطاع ٥٢	07703465111
مكتبة بسماية - داخل مجمع البسماية	07711625230
مكتبة طاهر - حي جميلة	07713315551
مكتبة جلنار - الكريعات - الكويتي	07722633262
مكتبه الانوار - البنوك - مجاور الفتلاوي	07700181191
مكتبه اشبيلية - ساحة مظفر	07707197770
مكتبه الانوار / حي اور	07700181191
مكتبه زرقاء اليمامة / المدائن	07713214973
مكتبه قرطاس - الزعفرانية - فلكة المعهد	07712569094
مكتبة امونة - النهروان - شارع المستشفى	07716422334
مكتبة جوهرة الحبيبية - الحبيبية - قرب مستشفى الولادة	07706930404
مكتبة الامل -البنوك - شارع الكنيسة	07709516294
مكتبة القلعة - حي الخضراء - مقابل ثانوية المتميزات	07728662032
مكتبة الريان - قضاء الطارمية - ش محطة الوقود	07709751579
مكتبة الغدير - الدولعي - شارع المخازن	07714271176
مكتبة المتنبي - ابو دشير	07739690900
مكتبة السند - السيدية - مقابل مرطبات الفقمة	07707871074
مكتبة الباز - السيدية	07732746225
مكتبة يوسف وحيدر - الدورة - السابعة	07711814743
مكتبة حيدر الضامد - ابو دشير - الشارع العام - ش الصيرفة	07902323008
مكتبه المستقبل -غزاليه - شارع مديرالامن	07901583499
مكتبة نجمة - السيدية - شارع الضباط	07706970536

جانب الكرخ

المكتبة	الهاتف
مكتبة الجوهرة - المنصور	07903230011
مكتبة العربية - العامرية - ش العمل الشعبي	07506988352
الفرع ٢- مكتبة العربية - مجمع العامرية الترفيهي	07506306329
مكتبة أغادير. المنصور- ش الرواد - عمارة برج الماس	07711124177
مكتبة اغادير- ش الاميرات - داخل ثانوية افق	07800505058
مكتبة لايك - حي العامل	07714875122
مكتبة الأزل - الكاظمية	07705433370
مكتبة اياد - الكاظمية - خلف الاطفاء	07901332833
قرطاسية المروة - العطيفية	07701866998
مكتبة العربي - السيدية	07832630930
مكتبة الرتاج - الدورة - ش ابو طيارة	07804047014
مكتب تفاحة - ابو غريب - الكراج الموحد	07801300200
مكتبة غسان - الدورة - الميكانيك - الساعاتي	07817499813
مكتبة التقى - المعالف - ش دكتور حافظ	07700730994
مكتبة الانيق - الحرية - ش مصور صلاح	07736392510
مكتبة عمار - الغزالية	07805248242
مكتبة ساندي بل - حي الجهاد	07702710731
مكتب القوس - حي الجامعة	07704370050
مكتبة الأخوين - حي العامل	07704258595
مكتبة الاماني - الحرية - دور نواب الضباط	07704560438
مكتبة طربوش - الدورة - ش ابو طيارة الرئيسي	07707471214
مكتبة الجرس - الدورة - شارع الجمعية	07709995682
مكتبة الناصر - الدورة - حي الصحة	07903501673
مكتبة الحسام - البياع - مقابل معارض البياع	07821615412
مكتبة عبد الله - حي القادسية - مجاور اعدادية الامين	07835089920
مكتبة ومركز القيصر - الشعلة - قطاع الاول	07713644472
مكتبة امجد وعمر - ناحية الرشيد - قرب إعدادية الروابي	07818695644
مكتبة المولى - الشرطة الرابعة - السوق الشعبي	07704777666
مكتبة القمة - الغزالية - شارع المرور	07800789995
مكتبة الأيام - السيدية - ش٤٠ - المخازن	07715661103

ملازم دار المغرب



mlazmna

وكلائنا الرئيسين في المحافظات لبيع الجملة للمكتبات والمفرد للطلاب وفي كل محافظة وكيل رئيسي والخ...

المركز التسويقي شارع المتنبي 07719373555 - 07819373555

ملاحظة: المؤشر اسمهم باللون الاحمر هو وكيل رئيسي في المحافظة

تسويق داخل المطبعة 07733530300

البصرة

المكتبة	الهاتف
مكتبة الجذور	07702687911
مكتبة المربد	07902494935
مكتبة حسين العطواني - المدينه	07703133928

ديالى

المكتبة	الهاتف
المكتب الذهبي - خانقين - شارع الاطباء	07702406444
مكتبة ام البنين- الخالص	07903666349
مكتبة الزهراء - الخالص	07707867592
مكتبة المتنبي٢ - المقدادية - سوق حي المعلمين	07711040655
مكتبة الاثير - بعقوبة	07711147502
مكتبة حيدر - بلدروز- ش المحكمة	07706202828
مكتبة النهرين - خان بني سعد	07729651805
مكتبة بيروت - بعقوبة - مقابل اعدادية الدراسات الاسلامية	07724393211
مكتبة ايام الانتظار - ديالى - جديدة الشط	07722052602
مكتبة الرضوان - بعقوبة الجديدة - شارع الطابو	07731030555

ميسان

المكتبة	الهاتف
مكتب اشرف وخلدون - شارع دجلة	07705572853
مكتب مهند	07710889998
المكتبة العلمية - المجر الكبير	07710901616
مكتبة الملزمة - شارع المدارس	07707319377
مطبعة الحرف الضوئي - قلعة صالح	07707333790

المثنى

المكتبة	الهاتف
قرطاسية فراس - السماوة	07716163457
مكتبة المنتظر - السماوة	07827281959

الأنبار

المكتبة	الهاتف
مكتبة ابومصطفى- الرمادي - شارع المستودع	07828881255
مكتبة الرصافي - الفلوجة - شارع ٤٠	07818100788
مكتبة المصطفى - الرمادي - الجمعية	07812525961
مكتبة حيدر - الرمادي - التأميم - القادسية الاولى	07800081212
مكتبة السامر - قضاء هيت - ش مستشفى هيت	07831054822
مكتبة البروج - هيت - ش المدخل الرئيسي	07902727220
مكتبة الجيل الجديد - حديثة - مقابل جنسية بروانة	07828236703
مكتبة النور - حديثة - الشارع العام	07809338325
مكتبة النهرين - خالدية - ش المستشفى	07814714141
مكتبة وليد الشاهر - الرمادي - شارع ١٧	07810350640

صلاح الدين

المكتبة	الهاتف
مكتبة الصديقين - سامراء - شارع الفاطمي	07702854488
مكتبة الشروق- تكريت شارع الاربعين	07703771003
مكتبة التقى - بلد	07817789408
مكتبة الضيوف سامراء - حي السكك	07712130374

الديوانية

المكتبة	الهاتف
مكتب النهرين - الديوانية	07801574901
مكتبة المنار	07831355322
مكتبة الشمس	07801089423
مكتبة الجديدة - ش المواكب	07702909912
مكتبة الصقر - قضاء الشامية	07725222984
مكتبة الطالب المتميز - قضاء الحمزه	07827742264

بابل

المكتبة	الهاتف
مكتبة التاج - الحلة - شارع ٤٠	07802767474
مكتبة الجوهرة - قضاء المسيب	07707244421
مكتبة أبو محمد - الحمزة الغربي	07800200350
مكتبة الازدهار - حلة - باب الحسين	07806504010
مكتبه الطالب - المسيب	07723975335
قرطاسية القمر - حمزة الغربي	07725255952
مكتبة المنتظر - المسيب	07713182440
مكتبة قصر المعارف - الحمزة الغربي	07812209161

النجف الأشرف

المكتبة	الهاتف
مكتبة النرجس	07828292236
مكتبة النجف الاشرف - المدينة القديمة	07801067833
مكتبة البغدادي - حي الجامعة	07801306615
مكتبة الوان - حي الامير	07800662212

الموصل

المكتبة	الهاتف
مكتبة كنانة - المجموعة الثقافية	07740864133
مكتبة الفجر - الموصل - حي القادسية الثانية	07511798067
مكتب الكشكول - المجموعة الثقافية	07713309033
مكتب الشمس - مقابل نفق الجامعة	07510332312
مكتبة رحلتي - حي المثنى - ش العام	07714778029
مكتبة معتز - موصل - حي القدس	07701727822
مكتبة ملزمتي - نفق الجامعة	07503072983
مكتبة حروف - الموصل - القادسية الثانية	07516271021

كربلاء

المكتبة	الهاتف
مكتبة القبس	07801004015
مكتبة الزوراء	07707771731

كركوك

المكتبة	الهاتف
قرطاسية الإسراء	07701334425
مكتبة اسامة	07701306054
قرطاسية الحاج علي	07719049333
مكتبة الشروق - القادسية - مقابل نادي سولاف	07709789943

ذي قار

المكتبة	الهاتف
مكتبة ذي قار - الناصرية - ش الحبوبي	07801576208
مكتبة الهدى - الشطرة - ش المحكمة	07816014615
مكتبة الدر - سوق الشيوخ	07827524412
مكتبة المرتضى - الشطرة	07803364615
مكتبة البغدادي - الرفاعي	07711919969
مكتبة الغدير - الناصرية - ش الحبوبي	07832303772
علاء - مكتب الباحث الناصرية - الصالحية	07826984033

واسط

المكتبة	الهاتف
مكتبة الكريم	07725423700
مكتبة النعمانية - النعمانية	07802469001
مكتبة الفرح - العزيزية - قرب فلكة انس	07726350721
مكتبة الهيثم - شارع المحافظة	07719001002
مكتبة الجواهري-الصويرة	07821800900
مكتبة نور المنتظر - صويرة	07807170745
مكتبة دجلة الخير - الزبيدية	07802255075

كل نسخة لا تحمل جلدة دائرية على وجه الغلاف تعتبر مزورة

سعر النسخة للطالب 10 الاف دينار